

■ Opgave 1 Reistijden

Soms is er een verschil tussen de tijd die een reis voor je gevoel duurt en de tijd die zo'n reis in werkelijkheid duurt. Het volgende voorbeeld illustreert dat.

Niels rijdt regelmatig met de auto van Keulen naar Düsseldorf. Zijn route gaat over een autosnelweg. De route is 40 kilometer lang. Hij rijdt normaal gesproken met een constante snelheid van 120 km/uur.

Op een dag heeft hij haast. Door 'flink door te rijden' denkt hij behoorlijk wat tijdwinst te kunnen boeken.

- 5 p 1 □ Bereken hoeveel km/uur hij sneller moet rijden om slechts 5 minuten te winnen.

Walther en Thomä (W&T), onderzoekers aan de hogeschool van Aken, hebben onderzoek gedaan naar de keuze tussen auto en bus in Aken. Zij ontwikkelden een model waarbij met bovenstaand verschijnsel rekening wordt gehouden en waarin ook zaken een rol spelen als 'Wat lastig dat ik moet overstappen' en 'Ik kan daar zo moeilijk parkeren'.

W&T gingen bij alle mogelijke reizen in Aken na:

- . uit welke onderdelen de reis bestaat;
- . hoeveel minuten elk onderdeel in werkelijkheid duurt;
- . welk gewicht men aan elk onderdeel toekent.

W&T onderscheidde daarbij de volgende onderdelen:

met de auto:

lopen van huis naar auto
rijden met de auto
zoeken naar parkeerplaats
lopen naar bestemming

met de bus:

lopen van huis naar bushalte
wachten op de bus
rijden met de bus(sen)
overstappen (totale tijd)
lopen naar bestemming

Het vinden van de juiste gewichten bij elk onderdeel van een reis was het moeilijkste gedeelte van het onderzoek van W&T. Het gewicht dat de reizigers toekenden aan elk onderdeel van de reis bleek snel groter te worden naarmate het onderdeel langer duurde. Dat bracht W&T op het idee om in hun model tijdsafhankelijke *gewichtsfactoren* op te nemen.

In de figuren 1 en 2 zijn de gewichtsfactoren voor de verschillende onderdelen uitgezet tegen de werkelijke tijd t in minuten. Deze figuren zijn ook afgebeeld op de bijlage.

De twee grafieken van de gewichtsfactoren voor 'rijden' zijn nogal verschillend.

- 4 p 2 □ Gebruik de figuren in de bijlage om af te lezen bij welke rijtijden de gewichtsfactor voor 'rijden met de auto' groter is dan die voor 'rijden met de bus'. Licht je antwoord toe.

Voor Aken geldt bij de keuze tussen auto of bus volgens W&T:

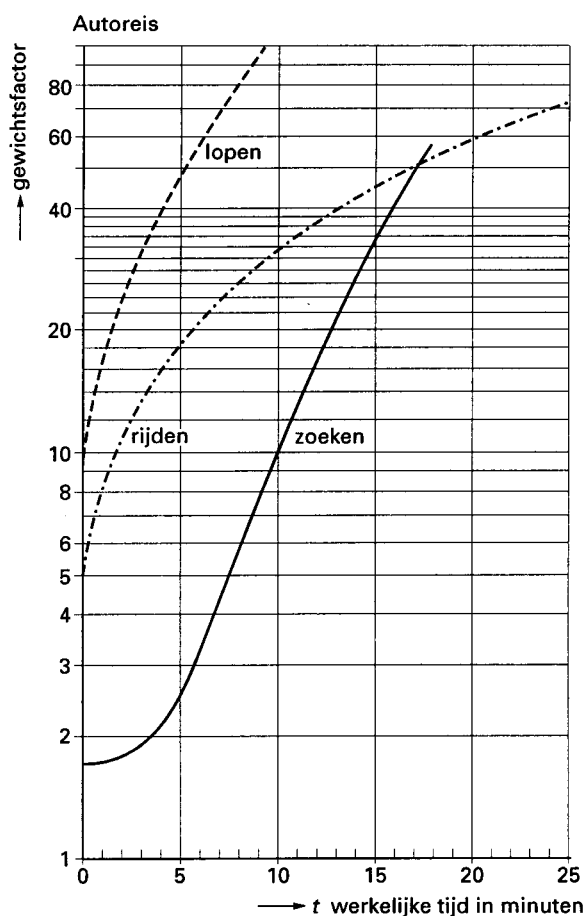
Men kiest in het algemeen voor de reis met de kleinste R-waarde.

Hierbij berekent men de R-waarde voor een reis als volgt:

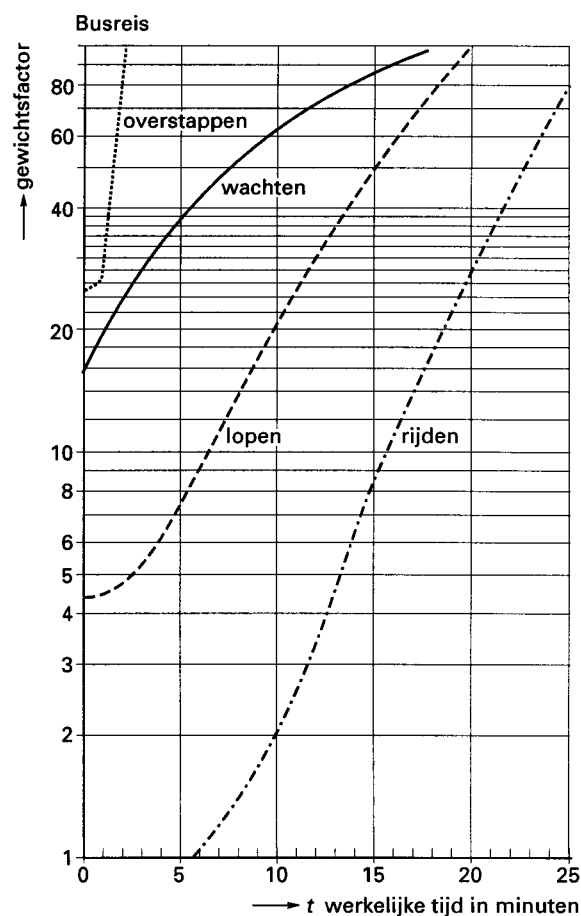
- 1 Ga na uit welke onderdelen de reis bestaat en hoe lang ze werkelijk duren.
- 2 Vermenigvuldig de tijden (in minuten) met de gewichtsfactoren (aflezen in figuur 1 of figuur 2).
- 3 Tel de resultaten op.

Eindexamen wiskunde A vwo 1996-I

figuren 1 en 2



1



2

Iemand kan zowel met de auto als met de bus in 31 minuten als volgt op school komen:

met de auto:

- 1 minuut lopen
- 20 minuten rijden
- 8 minuten zoeken
- 2 minuten lopen

met de bus:

- 3 minuten lopen
- 3 minuten wachten
- 19 minuten rijden
- 2 minuten overstappen
- 4 minuten lopen

8 p 3 Onderzoek welke keuze hij zal maken volgens het model van W&T.

W&T konden voor elk van de gewichtsfactoren een formule opstellen van de vorm $f = a + b \cdot t^c$, met t in minuten.

Voor de gewichtsfactor f van de overstaptijd vonden zij $f = 24,8 + 2,49 \cdot t^{4,66}$

Bij een busreis was de gewichtsfactor van de overstaptijd gelijk aan 56.

4 p 4 Bereken met bovenstaande formule de bijdrage van het overstappen aan de R-waarde van deze busreis.

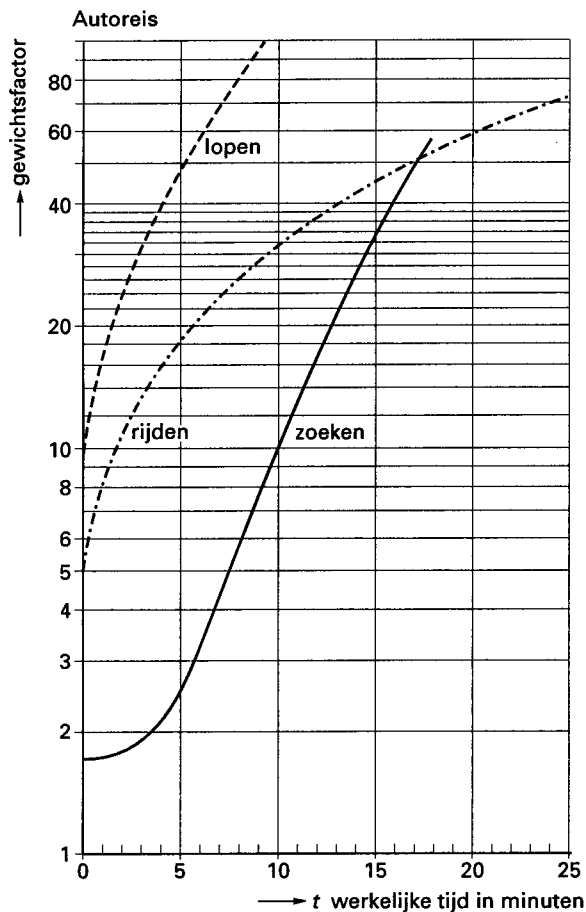
Voor de gewichtsfactor f van de zoektijd geldt:

$f = 1,7 + 0,0044 \cdot t^c$, met t in minuten.

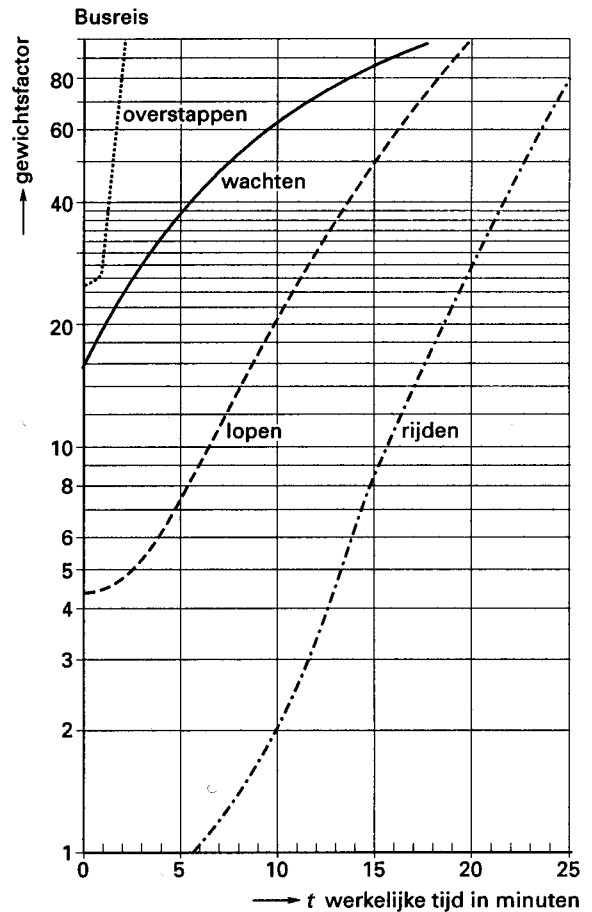
De grafiek van deze gewichtsfactor gaat door het punt (15, 33).

4 p 5 Bereken c .

Vraag 2



1



2

■ Opgave 2 Vlucht TW378

Korting

In de vliegwereld is het heel gewoon dat maatschappijen meer reserveringen boeken dan er plaatsen zijn. De ervaring heeft hun namelijk geleerd dat nogal wat mensen vlak voor vertrek hun reservering annuleren of gewoon niet komen opdagen.

Als een half uur voor vertrek nog vliegtuigstoelen onbezet zijn, geven luchtvaartmaatschappijen vaak flinke kortingen aan reizigers die niet hebben gereserveerd.

Twee studenten wachten op een luchthaven. Zij hopen gebruik te kunnen maken van bovengenoemde kortingsregeling bij vlucht TW378 van luchtvaartmaatschappij TransWorld.

De vertrektijd van vlucht TW378 is 12.00 uur. Zij zijn de eersten die goedkoop mee kunnen als er om 11.30 uur nog vliegtuigstoelen onbezet zijn.

Het is nu 11.00 uur en er zijn nog 94 stoelen onbezet.

Van de personen die van tevoren gereserveerd hebben, zijn er nog 100 die zich niet hebben gemeld. Neem aan dat voor ieder van deze 100 personen geldt: de kans dat hij/zij zich in het komende half uur meldt, is gelijk aan 0,85.

Neem bovendien aan dat er zich in het komende half uur geen reizigers aanmelden die niet van tevoren hebben gereserveerd, maar wel bereid zijn het normale tarief te betalen.

- 6 p 6 Bereken de kans dat beide studenten goedkoop met vlucht TW378 mee kunnen.

Brandstof

Voor het vertrek moet het vliegtuig brandstof tanken. De brandstof is op deze luchthaven zeer duur. Mede gelet op omstandigheden als wind en belading kan er van worden uitgegaan dat het brandstofverbruik voor vlieggreizen op het traject van vlucht TW378 normaal verdeeld is met een gemiddelde van 5800 liter en een standaarddeviatie van 330 liter. De reservetank zit vol en de gewone brandstoftank is leeg.

De voorschriften staan een risico van ten hoogste 1% toe dat men tijdens de vliegreis brandstof uit de reservetank nodig heeft.

- 5 p 7 Bereken hoeveel liter brandstof men ten minste moet tanken om aan de voorschriften te voldoen.

Koffie

Op vlucht TW378 vliegen kwaliteitscontroleurs van TransWorld mee.

Onder andere controleren ze de temperatuur van de koffie die de reizigers aan boord krijgen aangeboden. Als norm geldt dat deze in ten minste 90% van alle geserveerde kopjes koffie hoger moet zijn dan 56 °C.

Bij een aselechte steekproef van 50 geserveerde kopjes koffie bleek slechts in 40 gevallen de temperatuur in orde.

- 5 p 8 Onderzoek of de uitslag van de steekproef bij een significantieniveau van 5% voldoende reden vormt om aan te nemen dat de norm niet gehaald wordt.

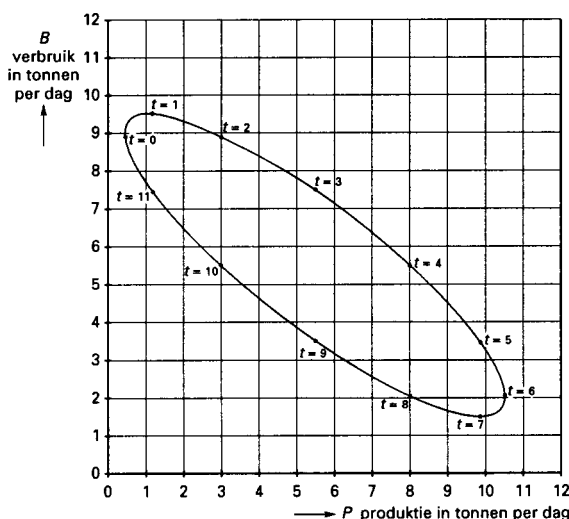
Opgave 3 Vet

We bekijken een model voor de *wereldvoorraad* van een bepaald soort plantaardig vet. Dit vet wordt in enkele subtropische streken geproduceerd. In de maanden juni en juli is de productie het grootst. Het vet wordt vooral gebruikt voor de vervaardiging van lippenbalsem, waarbij januari en februari de topmaanden zijn. Het geproduceerde maar nog niet verwerkte vet vormt de *wereldvoorraad*. De *wereldvoorraad* neemt toe door de productie van vet en neemt af door verbruik.

In het diagram van figuur 3 is te zien hoe productie en verbruik in de loop van een jaar in omvang variëren. Hierin is P de productie in tonnen per dag, B het verbruik in tonnen per dag en t het aantal maanden vanaf 1 januari. Zo kun je bijvoorbeeld uit het diagram aflezen dat op 1 januari ($t = 0$) er 0,5 ton vet geproduceerd wordt en 8,9 ton vet verbruikt wordt. De *wereldvoorraad* neemt dus op 1 januari af met 8,4 ton. Figuur 3 is ook twee keer op de bijlage afgebeeld.

figuur 3

Productie-verbruik diagram



Neem aan dat de *wereldvoorraad* op 1 juli 800 ton bedraagt. Met behulp van het diagram kan afgeleid worden dat de *wereldvoorraad* drie dagen later, dus op 4 juli, groter is dan 800 ton.

- 5 p 9 Hoeveel ton is de *wereldvoorraad* op 4 juli ongeveer? Licht je antwoord toe.

Voor de productie P geldt bij benadering de formule

$$P = 5,5 + 5 \sin \frac{1}{6} \pi (t - 3)$$

- 5 p 10 Stel een soortgelijke formule voor B op. Licht je werkwijze toe.

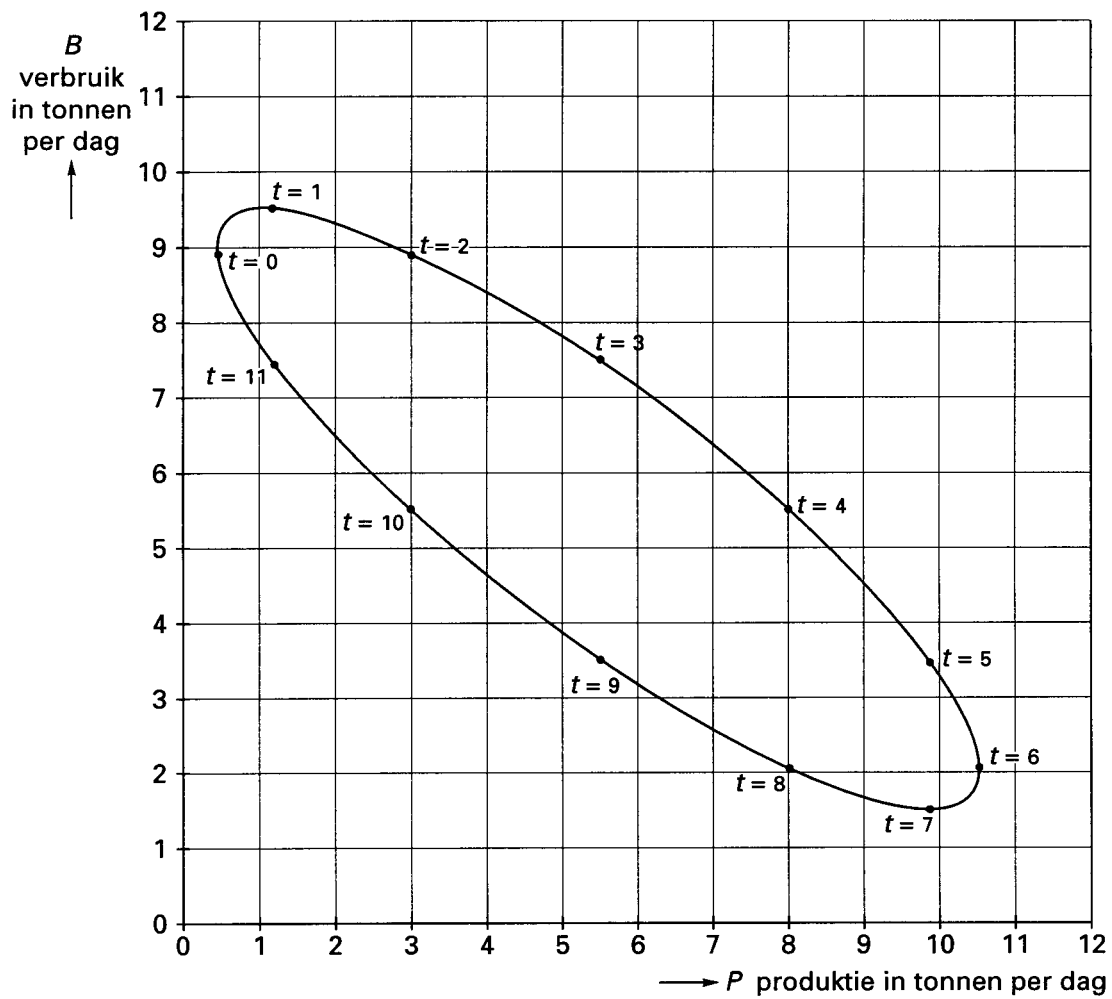
- 5 p 11 Omstreeks welke dag in het jaar is de *wereldvoorraad* maximaal? Motiveer je antwoord met behulp van het diagram op de bijlage.

Door veranderingen bij de verwerkende industrie wordt het verbruik van het vet meer gelijkmatig over het jaar verdeeld, de schommeling wordt minder. De productie verandert niet, deze blijft als voorheen in de loop van het jaar in omvang variëren.

- 6 p 12 Geef in de figuur op de bijlage aan hoe het diagram daardoor verandert. Geef een toelichting.

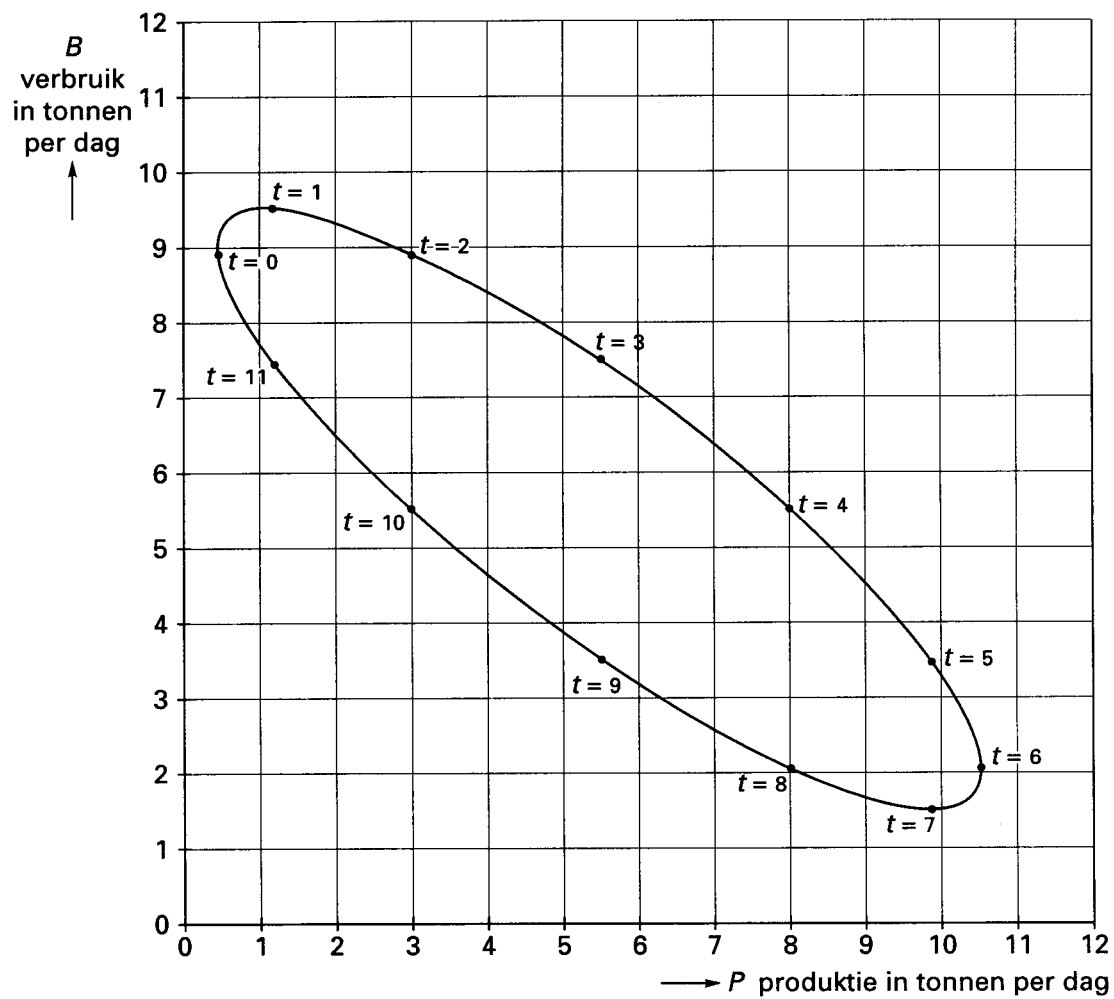
Bijlage bij vraag 11

Vraag 11



Bijlage bij vraag 12

Vraag 12



■ Opgave 4 Uitlenen

In bibliotheken moet men voortdurend beslissingen nemen over het afschrijven van boeken, het vervangen van beschadigde of zoekgeraakte exemplaren, enzovoort. Daarvoor is van belang dat men kan voorspellen hoe vaak een boek uitgeleend zal worden. P. M. Morse heeft hiervoor een wiskundig model ontwikkeld. In deze opgave passen wij zijn model toe op een vaste collectie van 9480 boeken. Geen van deze boeken wordt meer dan 7 keer per jaar uitgeleend. Volgens het model van Morse geldt voor deze collectie de volgende overgangsmatrix (M):

		aantal keer uitgeleend in een jaar								
		0	1	2	3	4	5	6	7	
aantal keer uitgeleend in het volgende jaar	0	0,819	0,606	0,449	0,333	0,247	0,183	0,135	0,100)
	1	0,164	0,303	0,360	0,366	0,345	0,310	0,271	0,231	
	2	0,016	0,076	0,144	0,201	0,242	0,264	0,271	0,265	
	3	0,001	0,013	0,038	0,074	0,113	0,149	0,180	0,203	
	4	0,000	0,002	0,008	0,020	0,039	0,064	0,090	0,117	
	5	0,000	0,000	0,001	0,005	0,011	0,022	0,036	0,054	
	6	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,006	0,012	0,021	
	7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,002	0,005	0,009	

$= M$

In matrix M is bijvoorbeeld te zien dat van de boeken die in een jaar vier keer worden uitgeleend, bijna 35% het volgende jaar één keer worden uitgeleend.

Van de boeken die in 1995 niet werden uitgeleend is er naar verwachting geen enkel boek dat twee jaar later (dus in 1997) zeven keer wordt uitgeleend.

5 p 13 □ Toon dit aan met behulp van matrix M .

Er zijn boeken die in 1995 twee keer werden uitgeleend.

6 p 14 □ Bereken hoeveel procent van deze boeken naar verwachting precies één keer zal worden uitgeleend in de twee jaren 1996 en 1997 samen.

Met behulp van matrix M kan worden berekend dat de boeken die 7 keer in een bepaald jaar worden uitgeleend, in het daarop volgende jaar gemiddeld 2,3 keer worden uitgeleend.

We noteren dit als $E_7 = 2,3$.

Op dezelfde manier zijn E_0, E_1, \dots, E_6 gedefinieerd.

4 p 15 □ Toon met behulp van de gegevens uit matrix M aan: $E_4 \approx 1,4$.

Er zijn matrices die bij vermenigvuldiging met matrix M als produkt een matrix opleveren die uitsluitend de getallen E_0, E_1, \dots, E_7 als elementen heeft.

5 p 16 □ Geef een voorbeeld van zo'n matrix. Licht het antwoord toe, vermeld daarbij duidelijk de volgorde van de matrixvermenigvuldiging.

Eindexamen wiskunde A vwo 1996-I

In tabel 1 staan de uitleencijfers voor 1995. Met behulp van matrix M zijn de verwachte uitleencijfers voor 1996 uitgerekend. Deze staan ook in tabel 1.

tabel 1

Uitleencijfers voor 1995 en verwachte uitleencijfers voor 1996

aantal keer uitgeleend	0	1	2	3	4	5	6	7
aantal boeken in 1995	7012	1978	397	68	19	4	1	1
verwacht aantal boeken in 1996	7148	1925	340	56	10	1	0	0

Het aantal boeken dat meer dan 4 keer per jaar wordt uitgeleend, blijkt gering te zijn. Daarom vereenvoudigt men het model door deze boeken gemakshalve als 4 keer uitgeleend te tellen. Uitgaande van matrix M stelt men de volgende matrix N op:

$$\begin{array}{c}
 \text{aantal keer uitgeleend} \\
 \text{in het volgende jaar}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{aantal keer uitgeleend in een jaar} \\
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 0 & 0,819 & 0,606 & 0,449 & 0,333 & 0,247 \\
 1 & 0,164 & 0,303 & 0,360 & 0,366 & 0,345 \\
 2 & 0,016 & 0,076 & 0,144 & 0,201 & 0,242 \\
 3 & 0,001 & 0,013 & 0,038 & 0,074 & 0,113 \\
 4 & 0,000 & 0,002 & 0,009 & 0,026 & 0,053
 \end{pmatrix} = N$$

Met behulp van matrix N kan men ook berekenen hoeveel boeken naar verwachting in 1996 drie keer worden uitgeleend.

- 4 p 17 Toon aan dat het zo berekende aantal niet of nauwelijks verschilt van het aantal dat in tabel 1 vermeld is.

U_t is het gemiddelde aantal uitleningen per boek per jaar in het jaar t .

Men kan aantonen dat steeds bij benadering geldt:

$$U_{t+1} = 0,2 + 0,3U_t$$

Op den duur zullen de percentages boeken die 0 keer per jaar, 1 keer per jaar, enzovoort, worden uitgeleend, hetzelfde blijven.

- 4 p 18 Bereken hoe groot het gemiddeld aantal uitleningen per boek per jaar op den duur zal zijn.