Eindexamen wiskunde A vwo 1995-II

Opgave 1 Verhuur van fietsen

De firma RAB verhuurt fietsen. Het verhuurbedrijf is elke dag open. De huurprijs is *f* 11,- per fiets per dag. Elke fiets, verhuurd of niet, kost RAB *f* 2,- per dag aan vaste kosten. Als een fiets wordt verhuurd, komt daar *f* 1,- aan kosten voor onderhoud en reparatie bij.

Stel dat RAB over 120 fietsen beschikt en er op een zekere dag maar 90 verhuurt.

3p 1 □ Bereken hoeveel winst RAB die dag op de fietsen maakt.

Alle fietsen van RAB zijn van goede kwaliteit. RAB bereikt dit door steeds op 1 januari alle gebruikte fietsen te verkopen en nieuwe fietsen aan te schaffen. Fietsen die verloren gaan door diefstal en aanrijding worden direct via de verzekering vervangen. Daardoor is het aantal beschikbare fietsen gedurende een kalenderjaar constant. Bij het bestellen in december vraagt RAB zich elke keer af: *'Hoeveel fietsen moeten we volgend jaar beschikbaar hebben?'*
De vraag naar fietsen verschilt namelijk van dag tot dag. Daarom wordt al jarenlang dagelijks bijgehouden hoeveel mensen er een fiets willen huren. Ook mensen die men moet teleurstellen omdat alle fietsen al verhuurd zijn, worden meegeteld. De gegevens in tabel 1 stammen uit 1980, het eerste jaar waarin de dagelijkse vraag is bijgehouden.

tabel 1 **Frequenties van gevraagd aantal fietsen per dag in 1980**

gevraagd aantal fietsen per dag	aantal dagen
25 - 49	14
50 - 74	47
75 - 99	94
100 - 124	108
125 - 149	75
150 - 174	23
175 - 199	5
	+
	366

8p 2 □ Toon met behulp van normaal waarschijnlijkheidspapier aan dat de dagelijkse vraag naar fietsen in 1980 bij benadering normaal verdeeld is en lees uit de tekening af hoe groot het gemiddelde en de standaarddeviatie van deze verdeling ongeveer zijn. Licht de werkwijze toe.

Op grond van de meest recente gegevens blijkt dat de dagelijkse vraag dit jaar bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 186 en een standaarddeviatie van 37.
Stel dat RAB dit jaar over 195 fietsen beschikt.

4p 3 □ Toon aan dat dit jaar op vrijwel 40% van de dagen ten minste één klant teleurgesteld moet worden omdat alle fietsen verhuurd zijn.

Als RAB dit jaar over één fiets meer zou hebben beschikt, dan zou dus op 40% van de dagen *f* 8,- meer winst behaald zijn en op 60% van de dagen *f* 2,- minder winst.

3p **4** □ Bereken de extra winst die RAB met deze 196-ste fiets dit jaar zou hebben behaald. Ga uit van 365 dagen in een jaar.

Neem aan dat de dagelijkse vraag ook het komende jaar bij benadering normaal verdeeld zal zijn met een gemiddelde van 186 en een standaarddeviatie van 37.
Uit vraag 4 blijkt dat 195 beschikbare fietsen in dat geval geen optimaal aantal is: een fiets erbij levert naar verwachting een hogere winst. Maar te veel fietsen beschikbaar hebben is natuurlijk ook niet verstandig. Er is een aantal van n fietsen (met $n > 195$) waarbij voor het eerst een fiets erbij naar verwachting geen extra winst zal opleveren. Dit is het gunstigste aantal voor RAB.

7p **5** □ Bereken dit gunstigste aantal beschikbare fietsen.

Opgave 2 Blokken en koppen

Het metaalbedrijf PGD fabriceert blokken en koppen. Voor het berekenen van het meest winstgevende produktieschema gebruikt de bedrijfsleider een computerprogramma. Zelf hoeft hij alleen de voorwaarden en de winstfunctie op te stellen. De computer levert dan de oplossing.
De blokken en koppen worden eerst gegoten in werkplaats I. Daarna worden ze geslepen, dit gebeurt óf in werkplaats II óf in werkplaats III. De machines in werkplaats III zijn enigszins verouderd, het slijpen duurt daar langer. In werkplaats II bestaat bovendien de mogelijkheid tot overwerk in de avonduren (zie tabel 2).

tabel 2

Bewerkingstijden en maximale capaciteit per werkplaats

bewerking	werkplaats	bewerkingstijd in minuten per blok	bewerkingstijd in minuten per kop	maximale capaciteit in minuten
gieten	I	8	5	30000
slijpen	II (overdag)	4	5	5000
	II (avonduren)	4	5	2500
	III	5	6	11000

Uit tabel 3 blijkt hoe de winst per blok en de winst per kop afhangen van waar en wanneer het slijpen gebeurt.

tabel 3

Aantallen en de winst per stuk in guldens

werkplaatsen	blokken aantal	blokken winst per stuk	koppen aantal	koppen winst per stuk
I en II (overdag)	a	14	d	10
I en II (avonduren)	b	12	e	8
I en III	c	13	f	9

De bedrijfsleider moet ook rekening houden met het feit dat PGD contractueel verplicht is ten minste 2700 blokken en ten minste 1100 koppen te leveren.
Omdat het computerprogramma uitgaat van niet-negatieve aantallen, hoeft de bedrijfsleider de voorwaarden $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, $d \geqq 0$, $e \geqq 0$ en $f \geqq 0$ niet op te stellen.

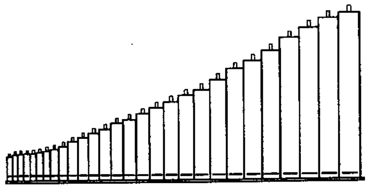
2p 6 □ Welke formule voor de winstfunctie moet de bedrijfsleider opstellen?

6p 7 □ Welke voorwaarden moet de bedrijfsleider opstellen?

Opgave 3 Kerkorgels

Een groot kerkorgel telt soms wel enkele duizenden orgelpijpen. De pijpen zijn gegroepeerd in registers. Zo'n register is een rij van ruim 50 pijpen van verschillende lengte. Een deel van een register is hiernaast afgebeeld.

afbeelding



Een register onderscheidt zich van andere registers door vorm en materiaal van de pijpen. Elk register klinkt daardoor anders.

Bij het bouwen van een orgel moet voor elke pijp de juiste lengte bepaald worden. De berekening van de lengtes gaat per register en kan als volgt beschreven worden.
Nummer de pijpen van klein naar groot: 0, 1, 2, ...
Als de kleinste pijp lengte L_0 heeft, dan moet voor de lengte L van de pijp met nummer n gelden:

$$L = L_0 \cdot 2^{\frac{n}{12}} \quad (L \text{ en } L_0 \text{ in millimeters})$$

4p **8** □ Toon aan dat per register voor elke pijp, behalve de kleinste, geldt: de lengte van die pijp is ongeveer 6% groter dan de lengte van zijn voorganger.

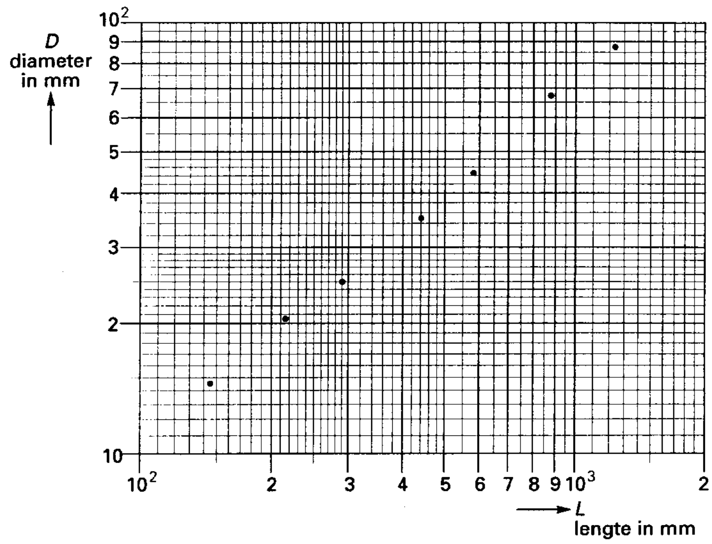
Voor het verkrijgen van de juiste klank is onder andere het verband tussen de lengte (L) en de diameter (D) van de pijpen van belang. Voor elk register is dat verband anders. Sommige orgelbouwers hanteerden vroeger een vuistregel die neerkwam op: per register moet voor de pijpen het quotiënt $\frac{D}{L^{0,75}}$ dezelfde uitkomst hebben.

Van een zeker register heeft de pijp met nummer 16 een lengte van 500 mm en een diameter van 60 mm.

4p **9** □ Bereken welke diameter de pijp met nummer 30 uit hetzelfde register volgens de vuistregel moet hebben. Rond het antwoord af op gehele millimeters.

Onderzoekers hebben lengte en diameter van een aantal pijpen van een ander register opgemeten en de resultaten uitgezet op dubbellogaritmisch papier (zie figuur 1).

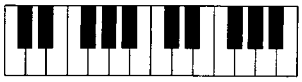
figuur 1



De getekende punten liggen bij benadering op een rechte lijn door de punten (150, 15) en (1500, 100). Bij deze lijn hoort een formule die D uitdrukt in L.

6p **10** ☐ Stel deze formule op en ga na of deze formule in overeenstemming is met de eerder genoemde vuistregel. Motiveer het antwoord.

afbeelding



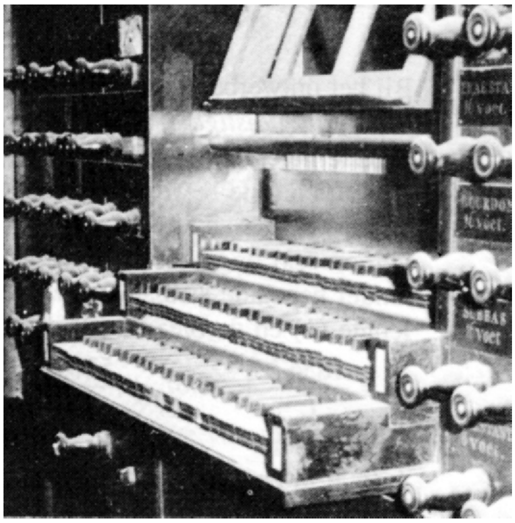
Silvia gaat naar de muziekschool voor orgelles. Daar speelt ze op een orgel dat één toetsenbord en 16 registers heeft.
Als alle registers op 'aan' staan, komt er bij het indrukken van een toets geluid uit 16 orgelpijpen. Elke toets is namelijk gekoppeld aan 16 pijpen, van elk van de registers één (bijvoorbeeld, toets nummer 5 is gekoppeld aan alle pijpen met het nummer 5).

Voordat Silvia gaat spelen, moet ze eerst kiezen welk(e) register(s) ze 'aan' wil hebben. Zo'n keuze noemt men een *registratie.* Zet ze bijvoorbeeld alleen de registers 4, 8 en 11 op 'aan', dan zal bij het indrukken van een toets maar uit drie pijpen geluid komen.

In de les mag ze een, twee of drie registers op 'aan' zetten. Anders hebben anderen last van het geluid.

11 ☐ Bereken uit hoeveel verschillende registraties ze in de les kan kiezen.

foto



Haar leraar is organist van een kerk met een groot orgel. Dat heeft 45 registers en drie toetsenborden die we aanduiden met I, II en III. Net als bij het orgel van de muziekschool is elke orgelpijp gekoppeld aan precies één toets van een toetsenbord. De koppeling blijkt uit het onderstaande schema.

schema

Pijpen van	gekoppeld aan toetsenbord
registers 1 t/m 16	I
registers 17 t/m 31	II
registers 32 t/m 45	III

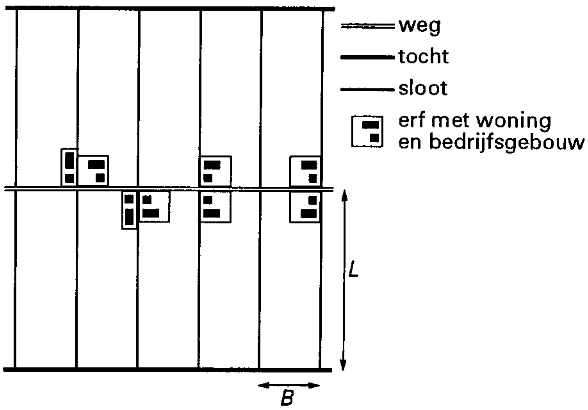
Silvia mag voor één keer op dit kerkorgel spelen. Omdat ze nog niet op meer dan één toetsenbord tegelijk kan spelen, moet ze eerst het toetsenbord kiezen waarop ze zal gaan spelen. Daarna nog de registratie bij het gekozen toetsenbord.
Van haar leraar mag ze helemaal vrij kiezen, geluidsoverlast is nu geen probleem.

4p **12** ☐ Bereken uit hoeveel verschillende registraties ze nu kan kiezen.

Opgave 4 Kavels

In polders wordt het overtollige water afgevoerd via sloten. Deze monden uit in *tochten*, dat zijn bredere sloten die het water verder afvoeren.
Bij de inrichting van de landbouwgebieden in de IJsselmeerpolders heeft men een regelmatig patroon aangehouden. De sloten staan loodrecht op de tochten. Midden tussen twee tochten loopt steeds een weg. Hierdoor wordt het land verdeeld in rechthoeken. Zo'n rechthoek noemt men een *kavel.* Een landbouwbedrijf beslaat doorgaans één of meer kavels. In figuur 2 zijn tien kavels te zien.

figuur 2



Bij het ontwerpen van de inrichting van deze polders heeft men zich de vraag gesteld: *'Wat zijn gunstige afmetingen voor een kavel?'* Grote kavels vergen minder investeringen en onderhoudskosten voor wegen, sloten en tochten. Bovendien ontstaan dan efficiënt te bewerken akkers.
Echter, een grote kavelbreedte levert hoge drainagekosten op en een grote kavellengte veroorzaakt hoge kosten voor het vervoer van mensen en materieel.
Onder bepaalde aannamen kwamen de ontwerpers tot het volgende verband tussen de lengte (L) en de breedte (B) van een kavel, en de totale kosten (K) per hectare:

$$K = \frac{18547}{L} + 56{,}6L + \frac{5279}{B} + 90{,}8B$$

K in guldens
L en B in hectometers, 1 hectometer (hm) = 100 meter

In Oostelijk Flevoland is gekozen voor standaardkavels van 30 hectare (= 30 hm^2).
Zo'n kavel zou bijvoorbeeld 6 hm lang en 5 hm breed kunnen zijn, of 10 hm lang en 3 hm breed. In het tweede geval zijn de totale kosten per hectare minder dan in het eerste geval.

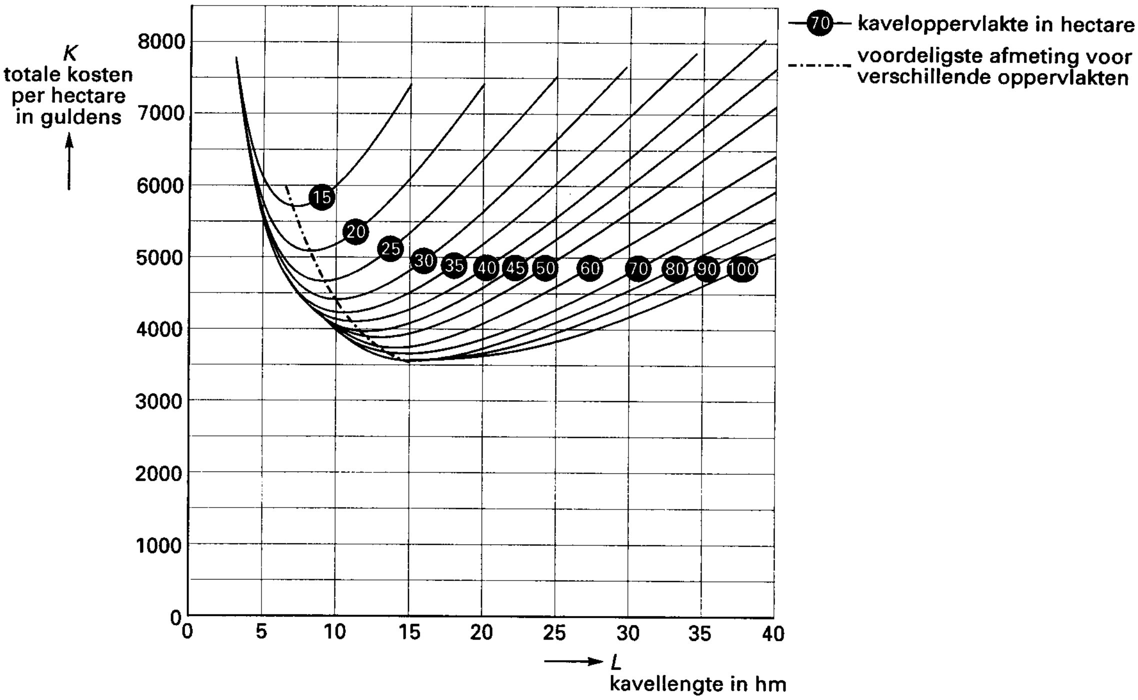
4p 13 □ Bereken hoeveel procent de totale kosten per hectare in het tweede geval minder zijn dan die in het eerste geval.

4p 14 □ Leid uit de gegeven formule af dat voor kavels van 30 hectare bij benadering geldt:

$$K = \frac{21271}{L} + 232{,}6L$$

In figuur 3 is voor een aantal kaveloppervlakten het verband weergegeven tussen de kavellengte L en de totale kosten per hectare K.

figuur 3



Voor kavels van 30 hectare is in figuur 3 af te lezen dat K minimaal is bij een kavellengte van iets minder dan 10 hm. Uitgaande van de formule van vraag 14 kan deze kavellengte met behulp van differentiëren worden berekend.

6p **15** □ Bereken deze kavellengte. Rond het antwoord af op gehele meters.

Iemand suggereert het volgende als vuistregel:
als je bij een gegeven oppervlakte de lengte drie keer zo groot kiest als de breedte dan zijn de totale kosten per hectare vrijwel minimaal.
Uit het bovenstaande is af te leiden dat dit klopt voor kavels van 30 hectare.

5p **16** □ Bereken welke waarde van L deze vuistregel bij kavels van 20 hectare oplevert en ga na of bij deze waarde de totale kosten per hectare volgens figuur 3 inderdaad vrijwel minimaal zijn.

Opgave 5 Fabricage van medicijnen

Een bepaald medicijn wordt gefabriceerd in een reactievat. De kwaliteit van het medicijn is bij de fabricage zeer moeilijk onder controle te houden. Als er een kleinigheid mis gaat in het reactievat is de gefabriceerde partij onbruikbaar. Hoewel het reactievat na elke onbruikbare partij grondig wordt gereinigd, kunnen minieme achtergebleven resten van invloed zijn op de fabricage van de volgende partij.
Voor het fabricageproces geldt de volgende kansenmatrix:

$$\begin{array}{lll} & & \text{partij is} \\ & & \begin{array}{cc}\text{onbruikbaar} & \text{bruikbaar}\end{array} \\ \text{volgende partij is} & \begin{array}{l}\text{onbruikbaar} \\ \text{bruikbaar}\end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} = M \end{array}$$

Uit matrix M blijkt bijvoorbeeld: als partij nummer 17 onbruikbaar is, dan heeft partij nummer 18 een kans van 0,6 om bruikbaar te zijn.

Een bepaalde partij is bruikbaar.

5p 17 □ Bereken de kans dat precies één van de eerstvolgende twee partijen onbruikbaar is.

Voor machten van M geldt de formule:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}75 \end{pmatrix} + (0{,}2)^n \cdot \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$$

6p 18 □ Laat zien dat een berekening van M^3 met een matrixvermenigvuldiging inderdaad hetzelfde resultaat geeft als een berekening van M^3 met deze formule.

Er moeten 600 bruikbare partijen geleverd worden.

6p 19 □ Hoeveel partijen zullen daartoe naar verwachting in totaal gefabriceerd moeten worden? Licht het antwoord toe.