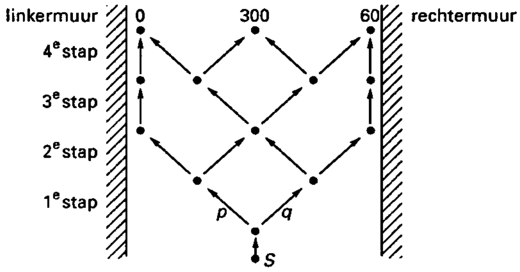
Eindexamen wiskunde A vwo 1992-II

Opgave 1 Gokspel

Jan ontwerpt spelletjes voor gokautomaten die met een videoscherm uitgerust zijn. Hij wil een nieuw spel ontwikkelen waarvan het principe op het in figuur 1 getekende speelbord gebaseerd is.

figuur 1

Het basisspeelbord



Een robot start in punt S. Elke keer als hij een splitsing bereikt, kiest hij met kans p voor de linker weg en met kans $q = 1 - p$ voor de rechter weg.
Als de robot echter tegen een van de twee 'zijmuren' van het speelveld botst, gaat hij recht naar boven naar eindpunt '0' of '60'.
Uitgekeerd wordt het aantal punten dat bij het bereikte eindpunt staat.

Bij de vragen 1 tot en met 7 gaan we ervan uit dat geldt: $p = 0{,}6$ en $q = 0{,}4$.

4p **1** □ Toon aan dat de kans dat bij een spel 300 punten uitgekeerd worden, gelijk is aan 0,2304.

Er worden 20 spelletjes gespeeld.

4p **2** □ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat de robot bij 5 van de 20 spelletjes eindpunt '300' bereikt.

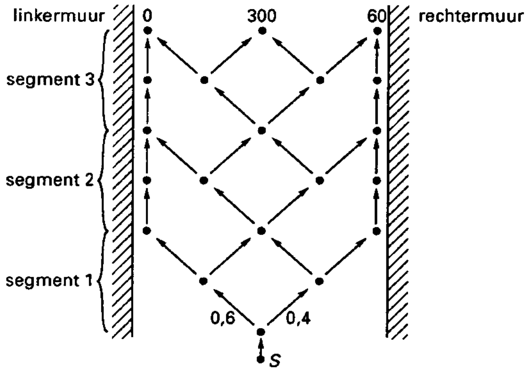
De uitkomst van een spel is na twee of na vier stappen volledig bepaald.

5p **3** □ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal stappen waarna de uitkomst van een spel volledig bepaald is.

Het in figuur 1 getekende speelbord bestaat uit twee segmenten: segment 1 voor de eerste twee stappen en segment 2 voor de volgende twee stappen.
Jan wil het definitieve spel zo maken dat er nog een aantal segmenten (die gelijk zijn aan segment 2) kunnen worden toegevoegd.
In figuur 2 is een speelbord met drie segmenten weergegeven.

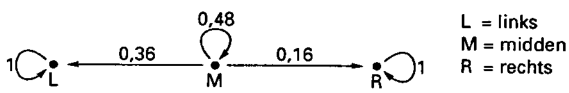
figuur 2

Het speelbord met 3 segmenten en $p = 0{,}6$



Om het spel beter te kunnen bestuderen gebruikt Jan de graaf van figuur 3. Deze geeft de overgangskansen per segment weer.

figuur 3



K is de kansmatrix die bij deze graaf behoort.

9p **4** □ Bereken de matrix K^3. Rond de getallen in K^3 af op vier decimalen.

X is het aantal punten dat aan het eind van een spel uitgekeerd wordt.

5p **5** □ Bereken in één decimaal nauwkeurig met behulp van de matrix K^3 de verwachtingswaarde van X voor het in figuur 2 weergegeven spel.

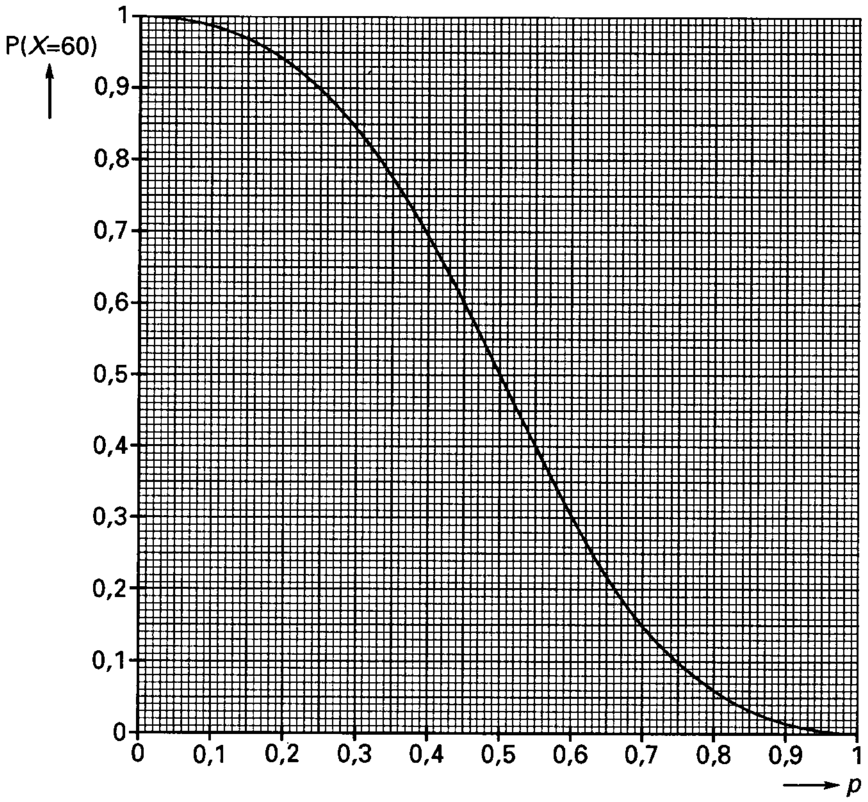
Stel dat het speelbord nu n segmenten bevat.
Als n groter wordt zal de kans dat de robot tegen een van de twee zijmuren botst ook groter worden. De kans dat er 300 punten uitgekeerd worden, zal dus steeds kleiner worden.

3p **6** □ Toon aan dat de kans $P(X=300)$ exponentieel afneemt als n groter wordt.

3p **7** □ Bereken vanaf welke waarde van n de kans $P(X=300)$ kleiner is dan 0,001.

Jan besluit dat de definitieve versie van het speelbord 15 segmenten bevat. Men kan aantonen dat in dat geval voor elke keuze van p de kans $P(X=300)$ verwaarloosbaar klein is en dat de hoop van de speler op een hoge uitkering dus vrijwel nihil moet zijn. De verwachtingswaarde van X hangt dan uitsluitend af van $P(X=60)$.
Deze kans hangt weer af van de waarde van p, de kans dat de robot bij een splitsing op het speelbord voor de linker weg kiest. In figuur 4 is de grafiek van $P(X=60)$ als functie van p getekend.

figuur 4 **De kans $P(X=60)$ als functie van p**



De inzet per spel is 25 punten. De winst van de speler is het verschil tussen uitkering en inzet.

4p **8** □ Bepaal met behulp van figuur 4 de verwachtingswaarde van de winst van de speler als $p = 0{,}6$.

5p **9** □ Bepaal met behulp van figuur 4 die waarden van p waarvoor de speler moet verwachten dat hij verlies lijdt.