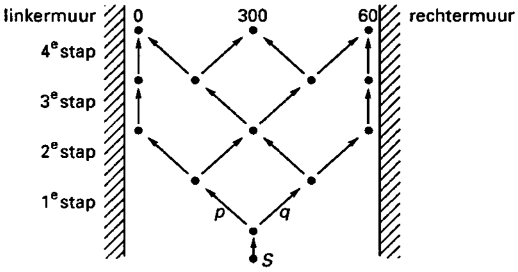
Eindexamen wiskunde A vwo 1992-II

Opgave 1 Gokspel

Jan ontwerpt spelletjes voor gokautomaten die met een videoscherm uitgerust zijn. Hij wil een nieuw spel ontwikkelen waarvan het principe op het in figuur 1 getekende speelbord gebaseerd is.

figuur 1

Het basisspeelbord



Een robot start in punt S. Elke keer als hij een splitsing bereikt, kiest hij met kans p voor de linker weg en met kans $q = 1 - p$ voor de rechter weg.
Als de robot echter tegen een van de twee 'zijmuren' van het speelveld botst, gaat hij recht naar boven naar eindpunt '0' of '60'.
Uitgekeerd wordt het aantal punten dat bij het bereikte eindpunt staat.

Bij de vragen 1 tot en met 7 gaan we ervan uit dat geldt: $p = 0{,}6$ en $q = 0{,}4$.

4p **1** □ Toon aan dat de kans dat bij een spel 300 punten uitgekeerd worden, gelijk is aan 0,2304.

Er worden 20 spelletjes gespeeld.

4p **2** □ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat de robot bij 5 van de 20 spelletjes eindpunt '300' bereikt.

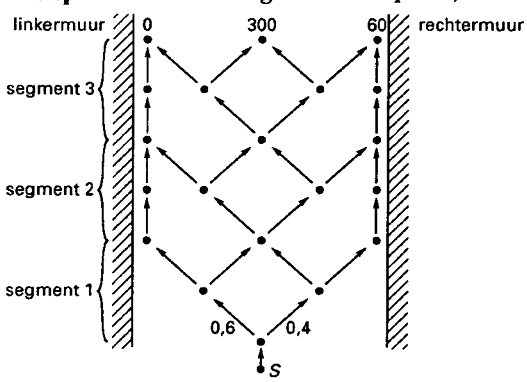
De uitkomst van een spel is na twee of na vier stappen volledig bepaald.

5p **3** □ Bereken de verwachtingswaarde van het aantal stappen waarna de uitkomst van een spel volledig bepaald is.

Het in figuur 1 getekende speelbord bestaat uit twee segmenten: segment 1 voor de eerste twee stappen en segment 2 voor de volgende twee stappen.
Jan wil het definitieve spel zo maken dat er nog een aantal segmenten (die gelijk zijn aan segment 2) kunnen worden toegevoegd.
In figuur 2 is een speelbord met drie segmenten weergegeven.

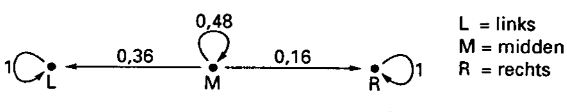
figuur 2

Het speelbord met 3 segmenten en $p = 0{,}6$



Om het spel beter te kunnen bestuderen gebruikt Jan de graaf van figuur 3. Deze geeft de overgangskansen per segment weer.

figuur 3



K is de kansmatrix die bij deze graaf behoort.

9p **4** □ Bereken de matrix K^3. Rond de getallen in K^3 af op vier decimalen.

X is het aantal punten dat aan het eind van een spel uitgekeerd wordt.

5p **5** □ Bereken in één decimaal nauwkeurig met behulp van de matrix K^3 de verwachtingswaarde van X voor het in figuur 2 weergegeven spel.

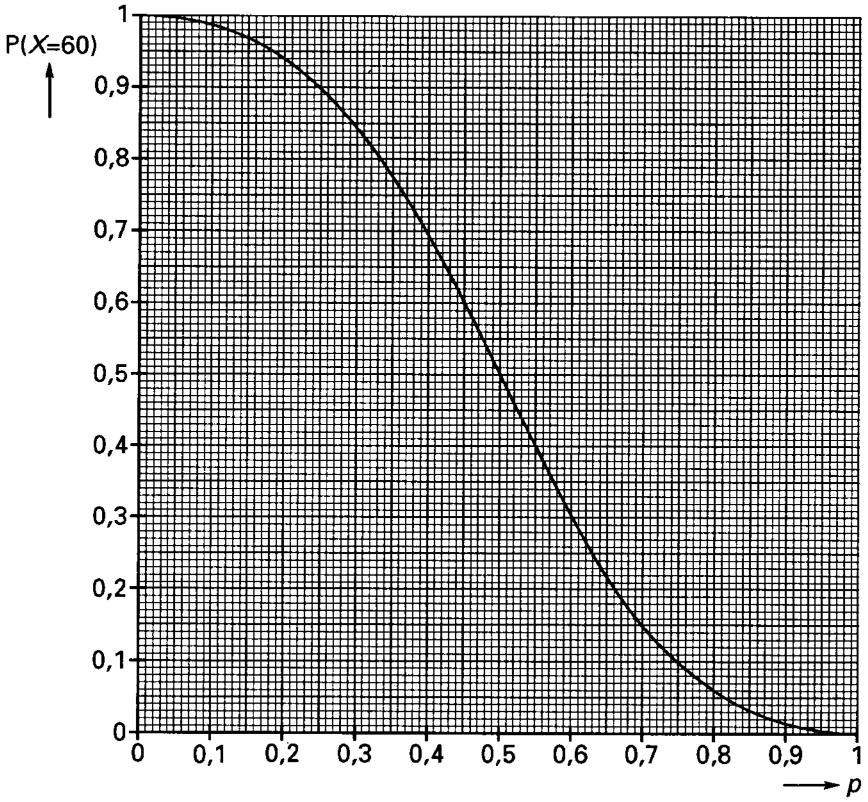
Stel dat het speelbord nu n segmenten bevat.
Als n groter wordt zal de kans dat de robot tegen een van de twee zijmuren botst ook groter worden. De kans dat er 300 punten uitgekeerd worden, zal dus steeds kleiner worden.

3p **6** □ Toon aan dat de kans $P(X=300)$ exponentieel afneemt als n groter wordt.

3p **7** □ Bereken vanaf welke waarde van n de kans $P(X=300)$ kleiner is dan 0,001.

Jan besluit dat de definitieve versie van het speelbord 15 segmenten bevat. Men kan aantonen dat in dat geval voor elke keuze van p de kans $P(X=300)$ verwaarloosbaar klein is en dat de hoop van de speler op een hoge uitkering dus vrijwel nihil moet zijn. De verwachtingswaarde van X hangt dan uitsluitend af van $P(X=60)$.
Deze kans hangt weer af van de waarde van p, de kans dat de robot bij een splitsing op het speelbord voor de linker weg kiest. In figuur 4 is de grafiek van $P(X=60)$ als functie van p getekend.

figuur 4 **De kans $P(X=60)$ als functie van p**



De inzet per spel is 25 punten. De winst van de speler is het verschil tussen uitkering en inzet.

4p **8** □ Bepaal met behulp van figuur 4 de verwachtingswaarde van de winst van de speler als $p = 0{,}6$.

5p **9** □ Bepaal met behulp van figuur 4 die waarden van p waarvoor de speler moet verwachten dat hij verlies lijdt.

Opgave 2 Bevolking

In de bevolkingsstatistiek worden tabellen met 'sterftekansen' opgesteld. Hieronder is een dergelijke tabel voor een aantal leeftijden te zien. De gegevens hebben betrekking op Nederlandse vrouwen en geven een indruk hoe groot de sterftekansen voor enkele jaren in de periode 1840–1970 zijn geweest (zie tabel 1).

tabel 1 **Sterftekansen van vrouwen**

jaar \ leeftijd	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1840	0,1654	0,0061	0,0085	0,0121	0,0158	0,0181	0,0295	0,0680	0,1482	0,3545
1850	0,1821	0,0059	0,0073	0,0112	0,0153	0,0169	0,0304	0,0504	0,1522	0,2974
1860	0,1823	0,0065	0,0071	0,0108	0,0144	0,0158	0,0297	0,0438	0,1530	0,2761
1870	0,1885	0,0052	0,0068	0,0100	0,0125	0,0137	0,0261	0,0623	0,1452	0,2880
1950	0,0261	0,0004	0,0008	0,0012	0,0023	0,0049	0,0124	0,0370	<u>0,0987</u>	0,2252
1960	0,0152	0,0003	0,0004	0,0007	0,0016	0,0036	0,0094	0,0284	0,0924	0,2300
1970	0,0118	0,0002	0,0004	0,0006	0,0014	0,0035	0,0081	0,0251	0,0813	0,2076

De sterftekansen zijn gebaseerd op tellingen en geven aan welk deel van de betreffende groep binnen één jaar overleden is. Zo kan aan de hand van het onderstreepte getal 0,0987 afgelezen worden dat ongeveer 9,87% van de vrouwen die 80 jaar werden in 1950, stierf voor hun 81ᵉ verjaardag.

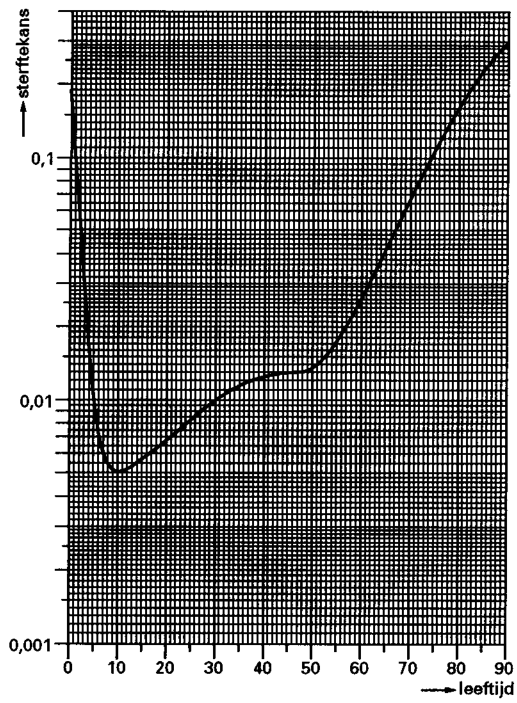
3p **10** □ Welk percentage van de vrouwen die 40 jaar werden in 1950 bereikte ook de 41ᵉ verjaardag?

Een studente wil in haar scriptie 'Amsterdam in 1870' onder andere aandacht geven aan de zuigelingensterfte. Zij vermoedt dat de sterftekans in 1870 voor nuljarige meisjes in Amsterdam door de toenmalige slechte leefomstandigheden aldaar hoger geweest moet zijn dan 0,1885. Zij neemt een aselecte steekproef uit het bevolkingsregister van Amsterdam van 200 meisjes die daar in 1870 werden geboren. In deze steekproef zijn 46 meisjes voor het bereiken van de éénjarige leeftijd overleden. Op grond van dit resultaat concludeert zij bij een significantieniveau van 5% dat haar vermoeden juist is.

8p **11** □ Onderzoek of deze conclusie correct is.

Voor de leeftijden tot 90 jaar zijn de sterftekansen voor het jaar 1870 op logaritmisch papier uitgezet in figuur 5.
Bij het tekenen is onder andere gebruik gemaakt van de gegevens uit tabel 1.

figuur 5



De grafiek van figuur 5 valt voor leeftijden vanaf 55 jaar vrijwel samen met de rechte lijn die gaat door de punten (60; 0,026) en (80; 0,145). Deze rechte lijn correspondeert met een formule voor de sterftekans (P) als functie van de leeftijd (L) in jaren.

7p **12** □ Stel zo'n formule op.

Als aangenomen wordt dat de formule van vraag 12 ook geldt voor leeftijden hoger dan 90 jaar, dan leidt dit tot een *theoretische* hoogste leeftijd.
Volgens de formule zou men bij het bereiken van deze leeftijd zeker binnen één jaar sterven.

5p **13** □ Bereken welke theoretische hoogste leeftijd uit de formule van vraag 12 volgt.

Opgave 3 Eb en vloed

De staatsuitgeverij publiceert elk jaar de Getijtafels voor Nederland. Daarin worden voor een aantal kustplaatsen zowel de dagelijkse tijdstippen voor hoogwater en laagwater als de verwachte hoogten (in centimeters) ten opzichte van Normaal Amsterdams Peil (NAP) vermeld.
Tabel 2 is ontleend aan zo'n Getijtafel. Hierin kan bijvoorbeeld worden afgelezen dat hoogwater te Harlingen op 1 juli 1989 verwacht werd op zowel het tijdstip 7 uur en 24 minuten ('s ochtends) als het tijdstip 20 uur en 4 minuten ('s avonds).

tabel 2

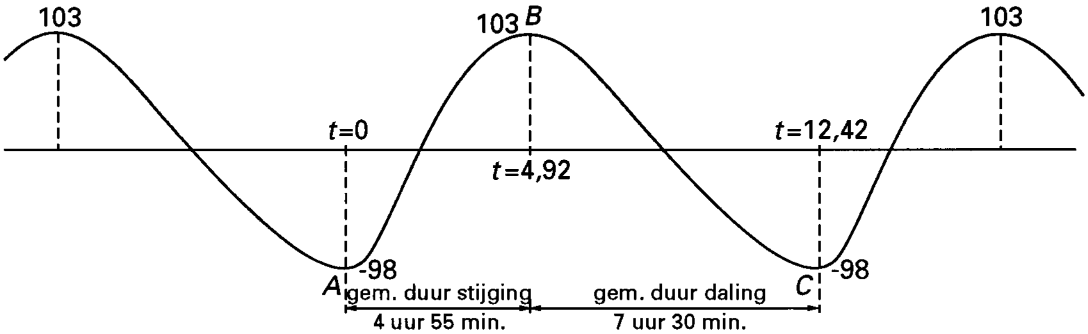
HARLINGEN

juli 1989

datum	laagwater		hoogwater	
	u.min	NAP -cm	u.min	NAP +cm
1 za	2.39	-95	7.24	78
	15.09	-105	20.04	91
2 zo	3.49	-97	8.45	93
	16.15	-109	21.05	88
3 ma	4.40	-99	9.40	105
	17.19	-109	22.15	84

Door de gegevens over zeer lange tijd te middelen, krijgt men voor Harlingen de gemiddelde getijkromme die is weergegeven in figuur 6.

figuur 6



Uit tabel 2 kan voor zes gevallen de tijdsduur worden berekend die verstrijkt van laagwater tot het eerstvolgende hoogwater.

6p **14** □ Onderzoek met een berekening of het gemiddelde van die tijdsduren meer dan twee minuten afwijkt van de in figuur 6 vermelde gemiddelde duur van 4 uur en 55 minuten.

De vorm van de grafiek laat duidelijk zien dat een model voor de gemiddelde getijdebeweging dat uitgaat van één enkele sinusoïde niet erg realistisch is. Beter is het om het stijgende deel AB en het dalende deel BC elk met een afzonderlijke sinusoïde te beschrijven. Omdat de tijdsduur 4 uur en 55 minuten ongeveer overeenkomt met 4,92 uur, geldt voor de waterhoogte (h) voor waarden van t tussen 0 en 4,92 bij benadering:

$$h = 100{,}5 \cdot \sin 0{,}64\,(t-2{,}46) + 2{,}5$$

4p **15** □ Bereken, uitgaande van dit model, de maximale stijgsnelheid van het water in centimeters per uur.

Voor het dalende deel BC geldt bij benadering:

$h = 100{,}5 \cdot \sin a(t - b) + 2{,}5$

6p **16** □ Bereken a en b in twee decimalen nauwkeurig.

In de praktijk gebruikt men in combinatie met de Getijtafels voor het benaderen van de waterstand soms de *twaalfdelenregel*.
Bij opkomend getij let men op de stijging (S) van de waterhoogte gerekend vanaf de laagwaterstand tot de eerstvolgende hoogwaterstand.
De periode van opkomend getij wordt verdeeld in zes even grote tijdvakken en men veronderstelt:
- in het eerste en het zesde tijdvak neemt de waterhoogte gelijkmatig met 1/12 deel van S toe;
- in het tweede en het vijfde tijdvak neemt de waterhoogte gelijkmatig met 2/12 deel van S toe;
- in het derde en het vierde tijdvak neemt de waterhoogte gelijkmatig met 3/12 deel van S toe.

9p **17** □ Benader met de twaalfdelenregel en de gegevens van tabel 2 de waterhoogte te Harlingen op 3 juli 1989 omstreeks 8 uur 's ochtends.