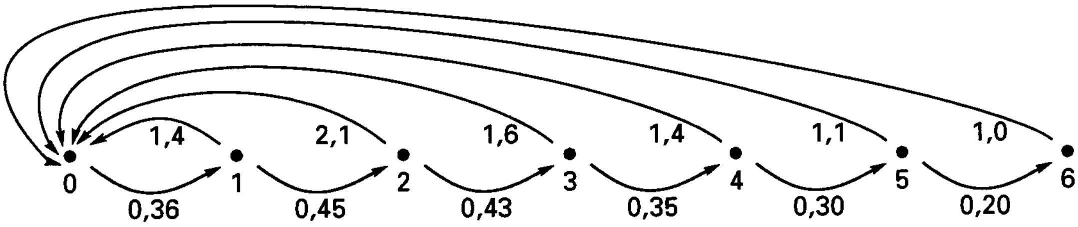
Eindexamen wiskunde A vwo 1992-I

Opgave 1 Roodborstjes

Bij een uitgebreid onderzoek naar de groei van vogelpopulaties stelden Amerikaanse biologen vast dat onder bepaalde omstandigheden de groei van een populatie roodborstjes beschreven kan worden met een model dat in de graaf van figuur 1 is weergegeven.

figuur 1



Uit deze graaf kan bijvoorbeeld worden afgelezen dat 45% van de éénjarige roodborstjes de tweejarige leeftijd bereikt en dat 100 éénjarige vogels per jaar gemiddeld 140 jongen voortbrengen. Ook blijkt uit de graaf dat de vogels de leeftijd van zeven jaar niet bereiken.

5p **1** □ Stel de populatievoorspellingsmatrix op die hoort bij de graaf van figuur 1.

Een populatie waarvoor de bovenstaande gegevens gelden, bestond op 1 juli 1990 (tijdstip $t = 0$) uit 2022 roodborstjes.
De verdeling over de verschillende leeftijden blijkt uit tabel 1.

tabel 1

leeftijd (in jaren)	0	1	2	3	4	5	6
aantal roodborstjes	1250	440	200	80	30	20	2

4p **2** □ Onderzoek of het totale aantal roodborstjes op 1 juli 1991 ($t = 1$) volgens dit model minder dan 1% afwijkt van het totale aantal op 1 juli 1990.

Onder het *vervangingscijfer* verstaan we de verwachtingswaarde van het aantal jongen dat een roodborstje gedurende het gehele leven krijgt.
Als geen enkel roodborstje de tweejarige leeftijd zou bereiken, zou het vervangingscijfer slechts $0{,}36 \cdot 1{,}4 = 0{,}504$ zijn en de populatie dus snel afnemen.

7p **3** □ Toon aan dat het vervangingscijfer in het door figuur 1 beschreven model ongeveer gelijk aan 1 is.

De getallen 0,36; 0,45; 0,43; ... in de graaf van figuur 1 noemt men de *overlevingskansen;* de getallen 1,4; 2,1; 1,6; ... noemt men de *vruchtbaarheidscijfers.* Uit voortgezet onderzoek bleek dat de in de graaf vermelde overlevingskansen onafhankelijk zijn van de populatieomvang, maar dat de in de graaf vermelde vruchtbaarheidscijfers slechts gelden voor een populatie die in totaal ongeveer 2000 roodborstjes telt.

Op grond van hun tellingen veronderstelden de onderzoekers dat het model als volgt bijgesteld moest worden:
voor de overgang van tijdstip t naar tijdstip $t + 1$ moeten alle vruchtbaarheidscijfers uit de graaf vermenigvuldigd worden met een faktor k, die op de volgende wijze afhangt van de populatieomvang N_t op tijdstip t:

$$k = 2 - \frac{N_t}{2000}$$

3p **4** □ Bereken voor welke populatieomvang deze bijstelling leidt tot een halvering van de vruchtbaarheidscijfers in vergelijking met die van het oorspronkelijke model.

Tabel 2 is verkregen door een computer volgens het bijgestelde model de aantallen op de tijdstippen $t = 1, 2, \ldots, 10$ te laten berekenen. Hierbij is uitgegaan van een populatie die op tijdstip 0 bestond uit:
1400 nuljarigen, 600 eenjarigen, 350 tweejarigen, 150 driejarigen, 80 vierjarigen, 40 vijfjarigen en 10 zesjarigen.

tabel 2

t	aantal 0-jaar	aantal 1-jaar	aantal 2-jaar	aantal 3-jaar	aantal 4-jaar	aantal 5-jaar	aantal 6-jaar	totaal
0	1400	600	350	150	80	40	10	2630
1	1357	504	270	150	52	24	8	2365
2	1325	489	227	116	53	16	5	2231
3	1277	477	220	98	41	16	3	2132
4	1274	460	215	95	34	12	3	2093
5	1249	459	207	92	33	10	2	2052
6	1250	450	206	89	32	10	2	2039
7	1239	450	202	89	31	10	2	2023
8	1239	446	203	87	31	9	2	2017
9	1234	446	201	87	30	9	2	2009
10	1234	444	201	86	30	9	2	2006

6p 5 □ Bereken hoeveel jongen de groep van 1400 nuljarigen van tijdstip $t = 0$ volgens het bijgestelde model in hun derde levensjaar zal voortbrengen.

Opgave 2 Kalkoenen braden

Engelse onderzoekers hebben het verband onderzocht tussen het gewicht van een kalkoen en de tijd die nodig is om die kalkoen in de oven bij een temperatuur van 175°C te braden. Aanvankelijk hadden ze slechts de gegevens uit een tweetal kookboeken.

tekst

Kookboek 1

Gewicht in pounds[1]	6	8	10	12	14	16	18	20
Oventijd in uren	2	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4

Kookboek 2
Voor een kalkoen met een gewicht van ten hoogste 14 pounds:
15 minuten per pound.
Voor een kalkoen zwaarder dan 14 pounds:
$3\frac{1}{2}$ uur + 12 minuten per pound boven 14 pounds.

De oventijd in minuten noemen we t en het gewicht van een kalkoen in pounds noemen we G.

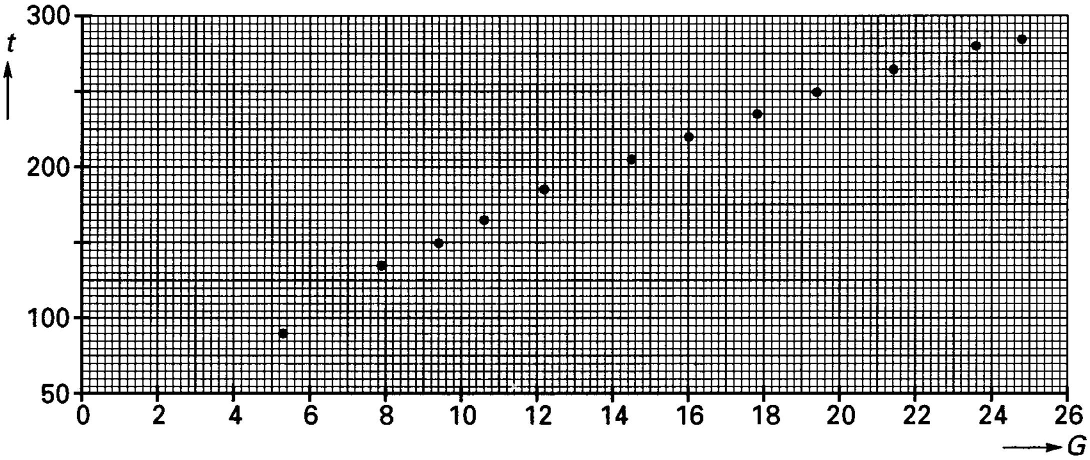
3p **6** □ Onderzoek of er bij kookboek 1 een lineair verband is tussen G en t.

Op grond van de tekst van kookboek 2 kunnen twee formules worden opgesteld om t te berekenen: een formule voor $G \leq 14$ en een formule voor $G > 14$.

4p **7** □ Stel deze twee formules op.

Met een experiment waarbij de onderzoekers 12 kalkoenen van verschillend gewicht in de oven braadden, wilden ze het verband tussen G en t nader onderzoeken.
Onder gelijke omstandigheden werd nagegaan hoeveel minuten het duurde tot het binnenste van de kalkoenen de temperatuur van 85°C bereikte.
In figuur 2 zijn de waarden van t op millimeterpapier uitgezet tegen G.

figuur 2



noot 1 De engelse gewichtseenheid pound komt overeen met een gewicht van iets minder dan 500 gram.

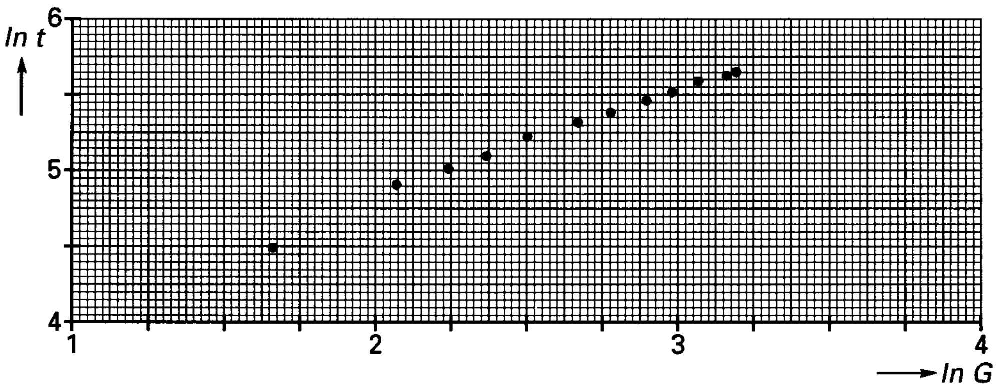
Voor de waarden van G geldt:
gemiddelde ≈ 15,24 en standaarddeviatie ≈ 6,07.
Voor de waarden van t geldt:
gemiddelde ≈ 205,4 en standaarddeviatie ≈ 59,1.
De regressielijn van t op G heeft tot vergelijking:
$t = 9{,}65 \cdot G + 58{,}40$.

5p **8** □ Bereken de correlatiecoëfficiënt tussen G en t in twee decimalen nauwkeurig.

Op grond van natuurkundige wetten vermoedden de onderzoekers dat het verband tussen G en t niet lineair maar van de vorm $t = a \cdot G^{\frac{2}{3}}$ is.

Om dit te controleren zijn de natuurlijke logaritmen van G en t ($\ln G$ en $\ln t$) van de testgegevens op millimeterpapier uitgezet. Het resultaat is te zien in figuur 3.

figuur 3



De 12 punten blijken vrijwel op de lijn te liggen die gaat door de punten (2; 4,85) en (3; 5,54).
Deze lijn heeft een vergelijking van de vorm $\ln t = p \cdot \ln G + q$.

5p **9** □ Toon aan dat $p = 0{,}69$ en bereken q.

6p **10** □ Toon aan dat de formule voor t die hieruit volgt, redelijk in overeenstemming is met het vermoeden dat het verband tussen G en t van de vorm $t = a \cdot G^{\frac{2}{3}}$ is en bereken a in gehelen nauwkeurig.

Opgave 3 Toltunnel

Het aantal personenauto's (A) dat per dag van een nieuw aan te leggen toltunnel gebruik zal maken, is volgens een verkeersdeskundige te berekenen met de formule:

$A = 400T^2 - 9150T + 46800$

Hierbij is T het toltarief in guldens. Toltarieven hoger dan f 7,- blijven buiten beschouwing. Met het oog op een snelle doorstroming zal de betaling op elektronische wijze geschieden. Hierdoor is het mogelijk om een toltarief van bijvoorbeeld f 2,67 in rekening te brengen omdat dat niet op praktische bezwaren stuit.

3p **11** □ Bereken de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's bij een toltarief van f 2,-.

7p **12** □ Bereken in centen nauwkeurig bij welk toltarief de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's maximaal is.

5p **13** □ Bereken met hoeveel procent het aantal personenauto's afneemt als bij een tarief van f 2,40 een tariefsverhoging van 5% wordt toegepast.

Voor het berekenen van de procentuele afname a van het aantal personenauto's bij een verhoging van het toltarief T met p% kan het volgende structuurschema gebruikt worden.

structuur-schema

T	$\leftarrow$	invoer
p	$\leftarrow$	invoer
A	$\leftarrow$	$400T^2 - 9150T + 46800$
T_1	$\leftarrow$	$T \cdot (1 + \frac{p}{100})$
A_1	$\leftarrow$	$400T_1{}^2 - 9150T_1 + 46800$
a	$\leftarrow$	*
		uitvoer a

3p **14** □ Schrijf op welke uitdrukking rechts van de pijl ingevuld moet worden in de regel die aangeduid is met *.

Bij een zeker toltarief leidt een tariefsverhoging van 6% (dus $p = 6$) er toe, dat het aantal personenauto's dat dagelijks de tunnel gebruikt met 2,8% afneemt (dus $a = 2{,}8$).

5p **15** □ Bereken in gehelen nauwkeurig met hoeveel procent de totale dagopbrengst aan tolgeld voor personenauto's door deze tariefsverhoging zal toenemen.

Opgave 4 De speelkaartensimulator

Een spel speelkaarten bestaat uit 52 kaarten in vier soorten: schoppen, ruiten, klaveren en harten. Elke soort telt 13 kaarten: aas, 2, 3, 4, ..., 10, boer, vrouw en heer.
Iemand heeft een computerprogramma KASIM ('kaartensimulator') gemaakt dat als uitvoer een 'willekeurige' kaart uit zo'n spel geeft. Door KASIM herhaald aan te roepen, kun je het proces simuleren van telkens een kaart uit het spel trekken, de kaart weer in het spel steken, schudden, opnieuw trekken, enzovoort.
Anja heeft KASIM tien trekkingen laten uitvoeren. In twee van deze tien gevallen is schoppenaas getrokken.

4p **16** □ Bereken in drie decimalen nauwkeurig de kans op twee keer schoppenaas bij tien trekkingen als elke kaart dezelfde kans heeft om getrokken te worden.

Anja denkt dat de kans op schoppenaas groter is dan $\frac{1}{52}$. Zij laat KASIM achter elkaar 10400 trekkingen uitvoeren. Daarbij wordt 240 keer schoppenaas getrokken.

7p **17** □ Onderzoek of bij een significantieniveau van 1% de conclusie gerechtvaardigd is dat bij KASIM het trekken van schoppenaas een grotere kans heeft dan $\frac{1}{52}$.

Bernd denkt dat KASIM een schoppenvoorkeur heeft. Hij stelt voor om twee series van 50 trekkingen uit te voeren en telkens de soort van de kaart (schoppen, ruiten, klaveren of harten) te noteren. Treft hij beide keren meer dan 17 schoppen aan, dan verklaart hij dat KASIM een schoppenvoorkeur heeft.
Carla stelt voor om het totale aantal schoppen bij die 100 trekkingen te nemen en KASIM een schoppenvoorkeur toe te kennen als er ten minste k schoppen worden getrokken.

8p **18** □ Bereken bij welke keuze van k Carla een nagenoeg even groot risico loopt als Bernd om KASIM ten onrechte een schoppenvoorkeur toe te kennen.