Opgave 4 Storing

Els is laborante op een bacteriologisch laboratorium. Zij moet vaak met behulp van een microscoop tellingen verrichten in een weefselkweek. Dat tellen moet zeer nauwkeurig gebeuren. Als Els door de telefoon of door een collega uit haar concentratie wordt gehaald, moet ze van voren af aan met tellen beginnen.

Voor het bestuderen van deze en overeenkomstige situaties stellen we binnen deze opgave een model op. Daarbij maken we twee veronderstellingen. Allereerst veronderstellen we:

(a) *Elke storing eindigt aan het eind van de minuut waarin hij begon.*

In figuur 3 is schematisch een situatie weergegeven waarin Els 13 minuten nodig had voor een telling die zonder storingen 5 minuten zou hebben geduurd. In de derde, vierde en achtste minuut trad een storing op. Aan het begin van de vierde, vijfde en negende minuut was Els dus weer van voren af aan begonnen. Alleen de laatste keer kon zij de telling zonder storingen voltooien.
De totale tijd tot het einde van de succesvolle telling noemen we de *totale teltijd* (T).

figuur 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
		s	s				s					

Het is voorgekomen dat de totale teltijd van Els uitkwam op 25 minuten voor een telling die zonder storingen 8 minuten zou hebben geduurd.

14 □ Hoeveel storingen heeft Els bij die telling minimaal gehad? Licht het antwoord toe.

Voor het model nemen we als tweede veronderstelling aan:

(b) *Voor elke minuut is de kans dat er geen storing optreedt gelijk aan 0,9.*
(Hierbij wordt aangenomen dat voor elke minuut het optreden van een storing onafhankelijk is van het optreden van storingen in voorgaande minuten.)

W is de verwachtingswaarde van het aantal minuten totale teltijd bij een telling die zonder storingen n minuten zou duren. In het model geldt de volgende formule voor W:

$W = 10(1{,}111^n - 1)$, waarbij $n = 1, 2, 3, \ldots$

15 □ Bereken met deze formule de grootste waarde van n waarvoor deze verwachtingswaarde kleiner is dan 20.

We letten verder uitsluitend op tellingen die zonder storingen 8 minuten zouden duren (dus $n = 8$). Om een indruk te krijgen hoe groot de kansen op de verschillende waarden van de totale teltijd in de praktijk ongeveer zullen zijn, is een computersimulatie uitgevoerd. Omdat de totale teltijd in een enkel geval zelfs meer dan 50 minuten bedroeg, zijn de resultaten in klassen ingedeeld. In tabel 2 kunnen de klassen en de bijbehorende frequenties worden afgelezen.

tabel 2

totale teltijd in minuten	frequentie
8	842
9 tot en met 12	351
13 tot en met 16	346
17 tot en met 20	182
21 tot en met 28	192
29 tot en met 36	57
37 tot en met 52	27
53 tot en met 68	3
	2000

Met behulp van de gegevens van tabel 2 kan geschat worden hoe groot de gemiddelde totale teltijd van deze 2000 gevallen ongeveer geweest is.

16 □ Voer zo'n schatting uit, gebruik daarbij de klassemiddens; vermeld de klassemiddens en geef het antwoord in één decimaal nauwkeurig.

De kans op een totale teltijd van k minuten bij de gemaakte veronderstellingen noemen we $P(T = k)$, hierbij is $k = 8, 9, 10, \ldots$.
In tabel 2 zien we dat in 842 van de 2000 gevallen geldt $T = 8$.

De relatieve frequentie $\frac{842}{2000} = 0{,}421$ geeft een indicatie voor $P(T = 8)$.

17 □ Toon aan dat de werkelijke waarde van $P(T = 8)$ bij een nauwkeurigheid in drie decimalen gelijk is aan 0,430.

18 □ Bereken in drie decimalen nauwkeurig $P(T = 10)$.

De frequenties voor de klassen '9 tot en met 12' en '13 tot en met 16' bij de computersimulatie verschillen weinig. Op grond daarvan kan men vermoeden dat de kansen $P(9 \leqq T \leqq 12)$ en $P(13 \leqq T \leqq 16)$ ongeveer even groot zijn.

19 □ Beredeneer dat de kansen $P(T = 9)$, $P(T = 10)$, $P(T = 11)$, $\ldots$ $P(T = 16)$ gelijk zijn.