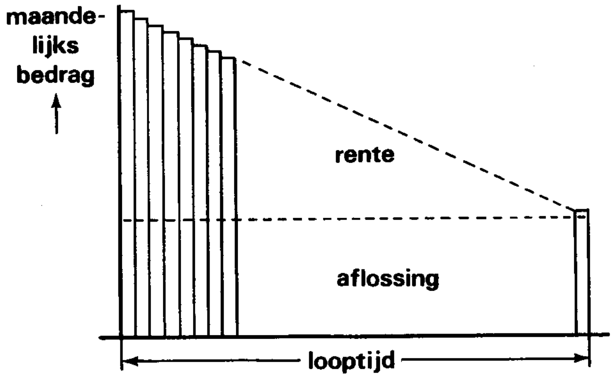
Opgave 2 Hypotheek

Voor de aankoop van een huis wordt doorgaans geld geleend van een bank; het huis zelf dient als onderpand; op het huis rust dan een hypotheek. Er zijn verschillende hypotheekvormen. In deze opgave komen er twee aan de orde: de lineaire hypotheek en de annuïteitenhypotheek.
Bij beide vormen wordt in de hypotheekakte vastgelegd dat over een van te voren afgesproken periode (de looptijd) maandelijks een bedrag aan de bank betaald moet worden. Dit maandelijks bedrag kan uitgesplitst worden in een aflossings- en een rentedeel.
Aan het einde van de looptijd moet de totale lening zijn afgelost. Omdat de schuld elke maand minder wordt, neemt het rentedeel voortdurend af.

De lineaire hypotheek
Bij de lineaire hypotheek is het uitgangspunt dat het *aflossingsdeel* elke maand even groot is. Omdat het rentedeel elke maand minder wordt, is dat dus ook het geval voor het maandelijks bedrag; in figuur 2 is dit schematisch weergegeven.

figuur 2

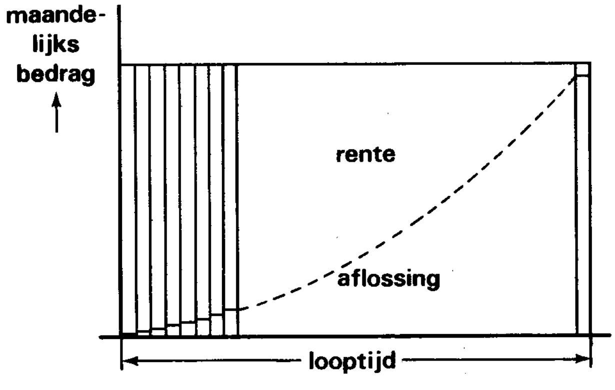


Mijnheer A sluit op 1 januari 1990 tegen een vaste rente van 0,7% per maand een lineaire hypotheek af voor een bedrag van *f* 90.000,–. De looptijd is 360 maanden.
De maandelijkse betalingen zullen steeds plaatsvinden op de eerste dag van de maand (te beginnen met 1 februari 1990).
De n^e betaling noemen we $B(n)$; $B(n)$ wordt gerekend in guldens.

8 □ Laat aan de hand van een berekening zien dat $B(1) = 880$.
9 □ Hoeveel zal in totaal afgelost zijn op 2 februari 1991?
10 □ Laat zien dat voor $B(n)$ geldt: $B(n) = 881{,}75 - 1{,}75n$.
11 □ Welk jaar zal het eerste kalenderjaar zijn waarin alle maandelijkse betalingen lager zijn dan 700 gulden?

De annuïteitenhypotheek
Bij de annuïteitenhypotheek zijn zowel het aflossingsdeel als het rentedeel variabel, het *maandelijks bedrag* (de annuïteit) is gedurende de hele looptijd elke maand even groot; in figuur 3 is dit schematisch weergegeven.

figuur 3



Mevrouw B sluit een annuïteitenhypotheek af voor een bedrag van f 90.000,– tegen een vaste rente van 0,7% per maand. Afgezien van de laatste maand zal zij elke maand een bedrag van f 800,– betalen.
We letten op de rij $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... ; hierbij is $S(0) = f\,90.000,–$ en $S(n)$ de schuld van mevrouw B op het moment dat zij de n^e betaling heeft gedaan ($n = 1, 2, 3, \ldots$).
Uit $S(0)$ kan $S(1)$ op de volgende manier berekend worden:

$S(0)$ + rente over de 1e maand = $1{,}007 \cdot f\,90.000,–$	$= f$	90.630,–
mevrouw B betaalt:	f	800,–
Dus schuld na haar 1e betaling = $S(1)$	$= f$	89.830,–

Uit $S(1)$ kan op overeenkomstige wijze $S(2)$ berekend worden, enzovoorts.

12 □ Toon aan dat $S(3) \approx f\,89.486,–$.

Voor het berekenen van $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, ... kan men ook

gebruik maken van de matrix $W = \begin{bmatrix} 1{,}007 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13 □ Toon aan dat $W^3 \cdot \begin{bmatrix} S(0) \\ -800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(3) \\ -800 \end{bmatrix}$.

Zo zal voor het berekenen van bijvoorbeeld $S(5)$ gebruik gemaakt kunnen worden van W^5.
De machten van W hebben een speciale structuur. Om die structuur te herkennen, noemen we 1,007 voor het gemak g.

14 □ Toon aan: als $W = \begin{bmatrix} g & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $W^5 = \begin{bmatrix} g^5 & g^4 + g^3 + g^2 + g + 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

W^5 kan anders geschreven worden door gebruik te maken van de eigenschap:

$$g^4 + g^3 + g^2 + g + 1 = \frac{g^5 - 1}{g - 1}.$$

15 □ Verklaar deze eigenschap door het produkt $(g - 1)(g^4 + g^3 + g^2 + g + 1)$ uit te werken.

Nemen we in plaats van g weer 1,007 dan geldt voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$W^n = \begin{bmatrix} 1{,}007^n & \dfrac{1{,}007^n - 1}{0{,}007} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16 □ Bereken $S(20)$ in guldens nauwkeurig.

Mevrouw C sluit tegen een vaste rente van 0,7% per maand een annuïteitenhypotheek af voor een bedrag van f 90.000,–. De looptijd is 360 maanden; alle maandelijkse betalingen zijn even groot.

17 □ Bereken in guldens nauwkeurig hoeveel zij maandelijks zal moeten betalen opdat aan het eind van de looptijd de gehele lening is afgelost.