Eindexamen wiskunde A1-2 vwo 2005-I

Meer neerslag

De laatste tijd komen er steeds meer aanwijzingen dat het klimaat op aarde verandert. Dit heeft onder andere gevolgen voor de jaarlijkse hoeveelheid neerslag in Nederland. Om een indruk te krijgen van die jaarlijkse hoeveelheid neerslag zijn in tabel 1 gegevens van vijf meetstations in de periode 1905-1998 weergegeven.

tabel 1

Gemiddelde jaarlijkse hoeveelheid neerslag gedurende de periode 1905-1998

	De Bilt	Gemert Volkel	Leeuwarden	Hoofddorp	Winterswijk
gemiddelde (mm)	783	711	753	768	768
standaardafwijking (mm)	139	123	106	127	136

We nemen aan dat de jaarlijkse hoeveelheid neerslag bij elk van de meetstations normaal verdeeld is.

We bekijken de kans dat er in een jaar meer dan 950 mm neerslag valt. Weerkundigen veronderstelden tot voor kort dat dergelijke kansen in de loop van de jaren niet veranderen.

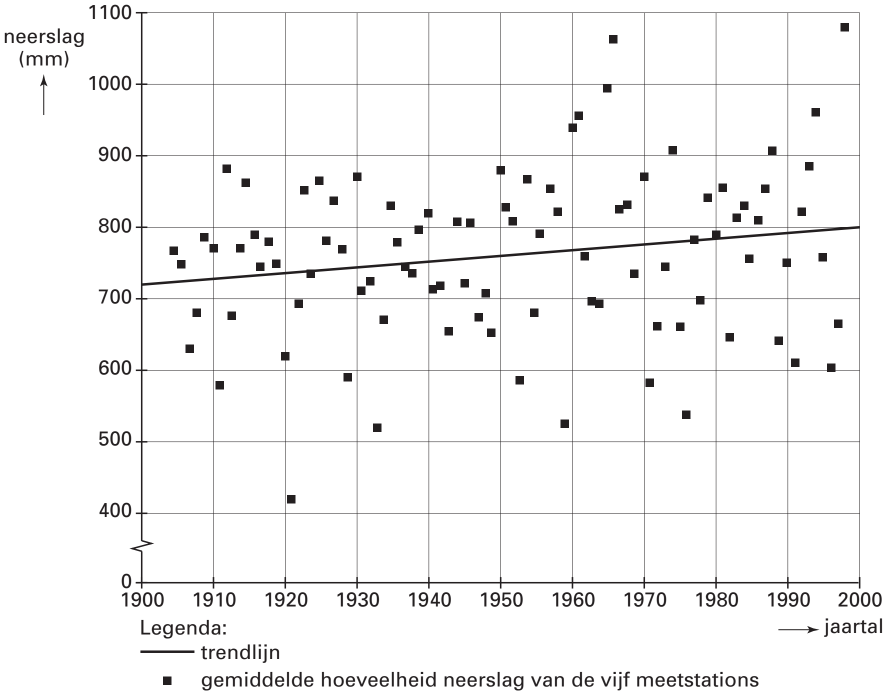
Op grond van het bovenstaande kunnen we nagaan of deze kans in Winterswijk groter is dan in Hoofddorp zonder deze kans uit te rekenen.

4p **1** ☐ Geef aan in welk van beide plaatsen de kans dat er in een jaar meer dan 950 mm neerslag valt, het grootst is. Motiveer je antwoord zonder daarbij deze kans uit te rekenen.

3p **2** ☐ Bereken de kans dat in een jaar in Leeuwarden meer dan 950 mm neerslag valt.

Zoals gezegd veronderstelden weerkundigen tot voor kort dat kansen op bepaalde hoeveelheden neerslag in de loop van de jaren niet veranderen. Inmiddels is men tot het inzicht gekomen dat er sprake is van een trend: de jaarlijkse hoeveelheid neerslag in Nederland neemt langzaam toe. In figuur 1 is voor elk jaar de gemiddelde hoeveelheid neerslag van de vijf meetstations met een blokje aangegeven. Bovendien is daarbij de zogenaamde *trendlijn* getekend. De trendlijn volgt zo goed mogelijk de gemiddelde jaarlijkse hoeveelheid neerslag. De trendlijn kan worden gebruikt om een schatting te maken van de te verwachten hoeveelheid neerslag in de komende jaren.

figuur 1



We veronderstellen dat de te verwachten jaarlijkse hoeveelheid neerslag N in mm in de toekomst lineair zal blijven toenemen. N kan dan worden geschreven als een functie van het aantal jaren t dat is verstreken vanaf 1900.

5p **3** ☐ Stel een formule op voor N en bereken daarmee in welk jaar de hoeveelheid neerslag volgens de trendlijn voor het eerst groter zal zijn dan 850 mm.

Er zijn ook andere manieren om te onderzoeken of het gedurende de afgelopen eeuw 'natter' is geworden. We kunnen kijken naar de 5 'natste' jaren. Deze zijn in figuur 1 af te lezen, namelijk 1961, 1965, 1966, 1994 en 1998. Het blijkt dat de 5 'natste' jaren allemaal na 1951 vielen, dus in de tweede helft van de periode 1905-1998.
Stel dat je 5 jaren willekeurig kiest uit deze periode van 94 jaar. De kans dat je uitsluitend jaren uit de tweede helft van de periode kiest, is klein.

4p **4** ☐ Bereken deze kans. Geef het antwoord in vier decimalen nauwkeurig.

Een andere maat voor de 'natheid' van een jaar is het aantal maanden van dat jaar dat de neerslag boven een bepaalde waarde, de grenswaarde, komt. Die grenswaarden zijn 30, 40, 50, …, 130 mm. Met de gegevens over de periode 1905-1998 is tabel 2 gemaakt.

tabel 2

Gemiddeld aantal maanden per jaar met grenswaardenoverschrijding

grenswaarde neerslag (mm)	>30	>40	>50	>60	>70	>80	>90	>100	>110	>120	>130
gemiddeld aantal maanden per jaar	10,2	9,2	7,9	6,5	5,4	3,8	2,7	1,9	1,4	1,1	0,6

Uit tabel 2 lezen we bijvoorbeeld af dat het aantal maanden per jaar waarin meer dan 60 mm neerslag viel, gemiddeld 6,5 bedroeg.
Men spreekt van een *extreem nat jaar* als meer dan 9 van deze grenswaarden vaker worden overschreden dan de overeenkomstige waarde in tabel 2.

De gegevens van De Bilt over 2001 zijn weergegeven in tabel 3.

tabel 3

Maandelijkse hoeveelheid neerslag in De Bilt in 2001

maand	jan	feb	mrt	apr	mei	juni	juli	aug	sep	okt	nov	dec
neerslag (mm)	71	89	74	87	29	54	87	116	211	41	85	94

4p **5** ☐ Onderzoek of 2001 voor De Bilt een extreem nat jaar was.

Breedte van wegen

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken.
Daarom stelde Gerlough de zogenaamde 'veilige norm' op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft. Dit maximum geven we hier aan met N_{max} en is afhankelijk van de breedte van de weg.
Gerlough beperkte zich in zijn onderzoek tot wegen met een breedte tussen 2 meter en 9 meter. Hij kwam tot de volgende formule:

$$N_{\text{max}} = \frac{8289{,}3}{B} \cdot (1{,}778 - \log B)$$

In deze formule is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kunnen we enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Over een weg passeren in de spits 800 auto's per uur.

3p **6** ☐ Bereken in decimeters nauwkeurig hoe breed deze weg ten hoogste mag zijn zonder dat de veilige norm wordt overschreden.

Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. De grafiek van N_{max} moet dus dalend zijn.
De formule voor N_{max} moet hiermee in overeenstemming zijn.

4p **7** ☐ Leg uit hoe je uitsluitend aan de hand van de formule voor N_{max} – dus zonder gebruik van de GR – kunt beredeneren dat hier sprake is van een dalende functie.

Een weg die voldoet aan de veilige norm, wordt 0,50 meter breder gemaakt. Volgens de formule neemt N_{max} daardoor met 126 af.

5p **8** ☐ Onderzoek met behulp van de GR hoe breed de weg oorspronkelijk was. Geef je antwoord in decimeters nauwkeurig.

Leugendetector

In het tijdschrift Nature stond enige tijd geleden een artikel waarin de werking van een leugendetector werd uitgelegd. Iemand die liegt, krijgt een nauwelijks waarneembaar ‘blosje’ in het gezicht. De leugendetector probeert dit blosje waar te nemen. Volgens het artikel is de leugendetector een belangrijk hulpmiddel om na te gaan of iemand liegt.
Met de leugendetector zijn veel experimenten uitgevoerd. Daaruit is gebleken dat de leugendetector niet altijd foutloos werkt. Zo wordt in slechts 75% van de gevallen een leugenaar daadwerkelijk als leugenaar herkend.
We nemen aan dat voor iedere leugenaar geldt dat de kans dat deze correct als leugenaar herkend wordt, gelijk is aan 0,75.

4p **9** ☐ Bereken in vier decimalen nauwkeurig de kans dat de leugendetector bij 200 leugenaars 40 of meer fouten maakt.

Ook bij eerlijke mensen (mensen die niet liegen) werkt de leugendetector niet altijd foutloos. Gemiddeld blijkt de leugendetector 1 van de 12 eerlijke mensen toch als leugenaar te bestempelen.
We bekijken een groep van 100 personen, bestaande uit 40 leugenaars en 60 eerlijke mensen. Je kunt narekenen dat de leugendetector naar verwachting bij 85 personen uit deze groep de juiste conclusie zal trekken. Men spreekt in dit geval van een *betrouwbaarheid* van 85% voor deze groep.

De betrouwbaarheid hangt af van de samenstelling van de groep. Wanneer we een groep van 100 personen nemen met daarin 16 leugenaars, krijgen we een andere waarde voor de betrouwbaarheid.

3p **10** ☐ Bereken hoe groot de betrouwbaarheid dan is.

Naarmate er in verhouding minder leugenaars in een groep zitten, zal de betrouwbaarheid van de leugendetector toenemen.
In een groep van 100 personen is de betrouwbaarheid van de leugendetector 87%.

4p **11** ☐ Bereken het aantal leugenaars in deze groep.

De leugendetector kan ook worden ingezet bij grootscheepse controles, zoals op vliegvelden. Daar moeten alle passagiers antwoord geven op de vraag of ze iets hebben aan te geven. Niet iedereen antwoordt naar waarheid.

Van alle passagiers in een bepaalde regio antwoordt 0,4% niet naar waarheid, zodat de betrouwbaarheid van deze leugendetector in die regio 91,6% is. De autoriteiten van een vliegveld in de regio overwegen deze leugendetector te gaan gebruiken, maar vinden de betrouwbaarheid van 91,6% nog te laag. Iemand beweert een nieuwe versie te kunnen leveren, die beter werkt. Daarmee bedoelt hij dat de kans op een juiste beslissing bij zijn leugendetector hoger is dan 0,916. Men besluit dit apparaat in deze regio te gaan testen. Bij de test geeft het apparaat in 834 van de 900 gevallen een juiste beslissing.

6p **12** ☐ Ga na of dit resultaat bij een significantieniveau van 5% voldoende aanleiding geeft om de conclusie te trekken dat deze nieuwe versie van de leugendetector beter werkt.

Pareto-krommen

In een fabriek worden printplaatjes voor mobiele telefoons geproduceerd. Alle printplaatjes worden gecontroleerd voordat ze de fabriek verlaten. Afgekeurde printplaatjes worden vernietigd. Bij de controle is een maand lang genoteerd wat de oorzaak is van het afkeuren, zie tabel 4. We gaan ervan uit dat andere maanden hetzelfde beeld vertonen.
In principe zijn al deze oorzaken te verhelpen door verbeteringen in het productieproces. Dat brengt wel de nodige kosten met zich mee. In tabel 4 is bij elke oorzaak aangegeven wat de maandelijkse kosten zijn om deze oorzaak te verhelpen.

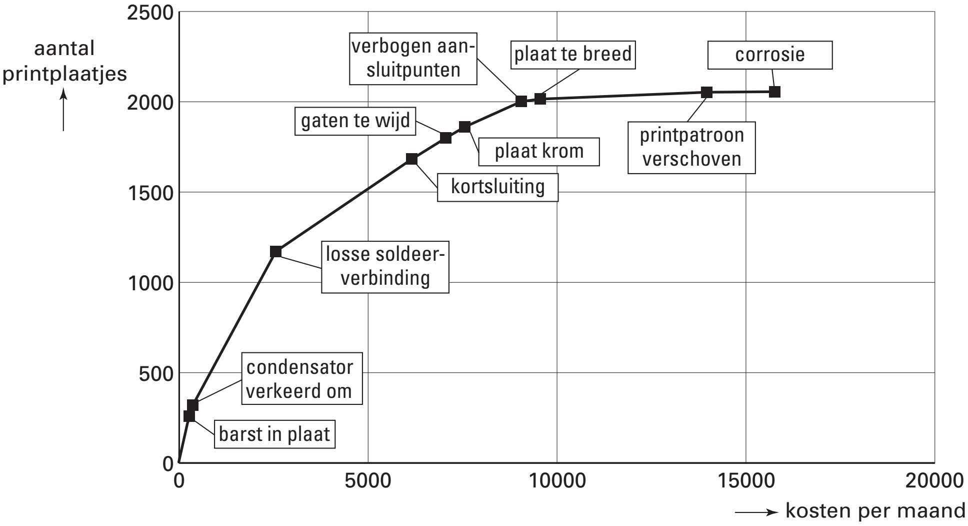
tabel 4

Onderzoek van afgekeurde printplaatjes gedurende de maand mei

oorzaak	aantal afgekeurde printplaatjes	kosten in euro per maand om oorzaak te verhelpen
losse soldeerverbinding	852	2200
kortsluiting	511	3600
barst in plaat	295	300
verbogen aansluitpunten	141	1500
gaten te wijd	117	900
plaat krom	61	500
printpatroon verschoven	38	4400
condensator verkeerd om	25	60
plaat te breed	13	500
corrosie	3	1800
totaal	2056	15 760

Door 15 760 euro per maand te investeren zou men alle 2056 afkeuringen kunnen voorkomen. Wanneer men slechts een deel van dit bedrag wil investeren, is het verstandig te beginnen met de oorzaak waarbij de vermindering van het aantal afkeuringen per geïnvesteerde euro het grootst is, vervolgens de oorzaak waarbij de vermindering van het aantal afkeuringen per geïnvesteerde euro het op één na grootst is, enzovoorts. In figuur 2 zijn de oorzaken op deze wijze geordend. Langs de horizontale as staan de cumulatieve kosten per maand om de oorzaken te verhelpen, langs de verticale as staat de cumulatieve vermindering van het aantal afkeuringen. Een dergelijke kromme heet een *Pareto-kromme*.

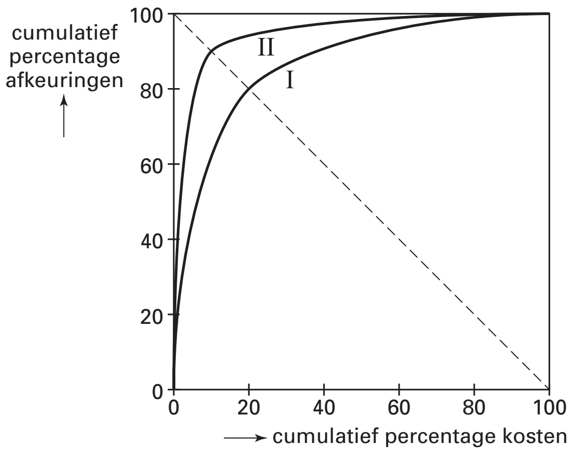
figuur 2



5p **13** ☐ Toon aan dat de volgorde van de oorzaken ‘kortsluiting’ en ‘gaten te wijd’ in figuur 2 in overeenstemming is met de gegevens in tabel 4.

Om Pareto-krommen bij verschillende productieprocessen te kunnen vergelijken, noteren we de kosten op de horizontale as als percentage van de totale kosten om álle afkeuringsoorzaken te verhelpen. En de aantallen afkeuringen op de verticale as noteren we als percentage van het totale aantal afkeuringen. In figuur 3 zijn enkele van zulke krommen getekend. Deze figuur staat ook, vergroot, op de uitwerkbijlage.

figuur 3



Kromme I gaat door het punt (20, 80). Dat betekent dat met 20% van de totale benodigde kosten 80% van de afkeuringen te voorkomen is. Deze kromme heet een (20, 80)-kromme. Kromme II is een (10, 90)-kromme.
Elke Pareto-kromme is op deze wijze aan te duiden als (a, b)-kromme met $a + b = 100$.

4p **14** ☐ Schets in de figuur op de uitwerkbijlage een (40, 60)-kromme.

In figuur 2 zijn geen percentages gebruikt. Toch kunnen we ook de grafiek in figuur 2 als (a, b)-kromme aanduiden, met $a + b = 100$. Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

4p **15** ☐ Welke aanduiding hoort bij de Pareto-kromme in figuur 2? Licht je antwoord toe.

Bij de volgende vraag kijken we niet meer naar percentages, maar naar kosten in euro.
Bij een bepaald productieproces heeft men voor de bijbehorende Pareto-kromme het volgende wiskundige model gemaakt:

$$B = 2500 \cdot K^{0,2}$$

Hierbij stelt K de cumulatieve kosten in euro voor om de verschillende afkeuringsoorzaken te verhelpen, en B de cumulatieve besparing in euro door de bijbehorende vermindering van het aantal afkeuringen.

Met dit model is te berekenen dat een investering van bijvoorbeeld 600 euro in het verhelpen van mankementen een besparing oplevert van bijna 9000 euro. Maar als er 800 euro wordt geïnvesteerd, is de besparing ruim 9500 euro. De keuze $K = 800$ is dus voor het bedrijf gunstiger dan de keuze $K = 600$. De extra besparing van 500 euro is namelijk groter dan de extra investering van 200 euro. Het is dus heel verstandig om die extra investering te doen.
Een verhoging van de investering van bijvoorbeeld 3000 naar 3300 euro levert echter een extra besparing op van minder dan 300 euro. Het is dan dus niet meer verstandig die extra investering te doen.
De beste keuze van K in dit verband is daar waar het verschil tussen de besparing en de investering het grootst is. Deze waarde van K kan worden gevonden met behulp van het opstellen van de afgeleide van $B - K$.

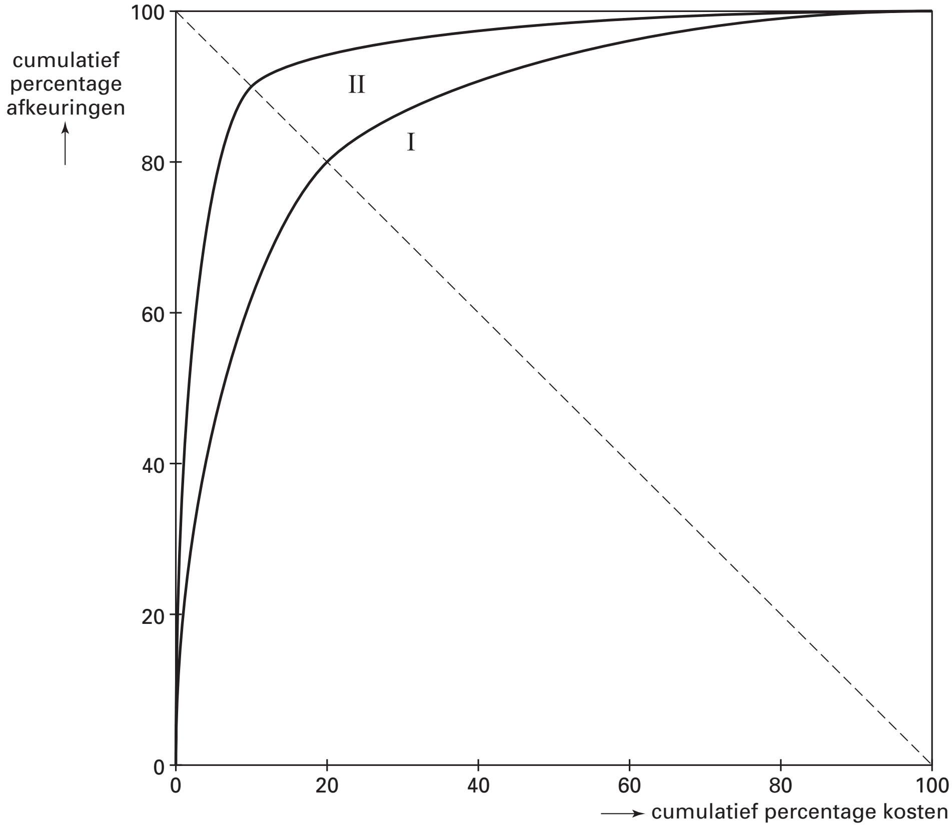
5p **16** ☐ Stel deze afgeleide op en bereken daarmee welke keuze van K de beste is.

Uitwerkbijlage bij vraag 14

....

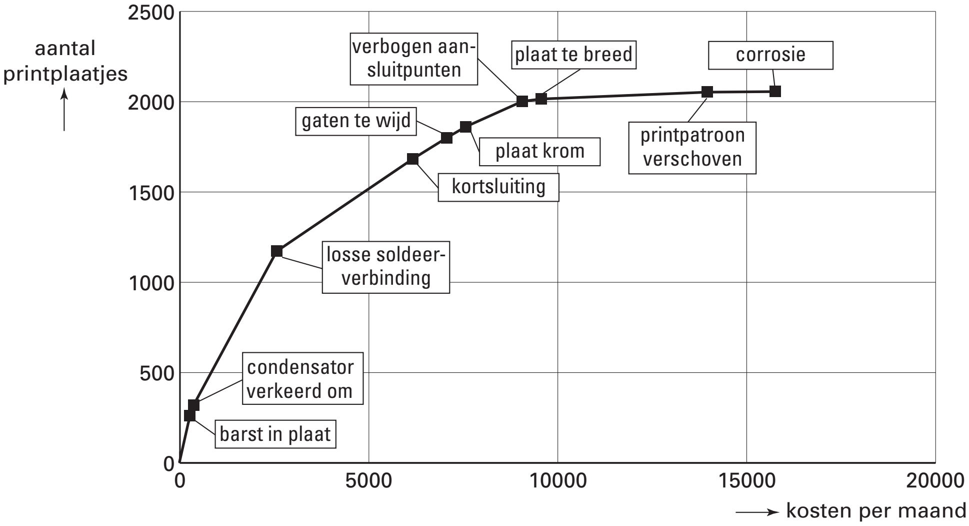
....

Vraag 14



Uitwerkbijlage bij vraag 15

Vraag 15



.

Veel zalm

De bioloog W. Ricker heeft veel onderzoek gedaan naar zalm in Canadese rivieren. Jaarlijkse tellingen hebben uitgewezen dat de omvang van de zalmpopulatie sterk fluctueert. Zo komt het voor dat de omvang van de populatie na een jaar meer dan verdubbeld is. Weer een jaar later is de omvang dan weer meer dan gehalveerd.
Ricker ontwikkelde rond 1955 een model dat goed bruikbaar is om dit verschijnsel te beschrijven. In deze opgave bestuderen we het model:

$$P(t+1) = 9 \cdot P(t) \cdot 0{,}99^{P(t)} \text{ met beginwaarde } P(0)$$

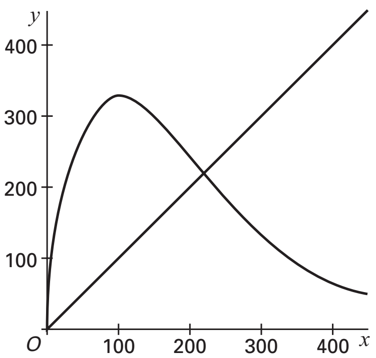
In deze recursievergelijking is t het aantal jaren na 1984 (het tijdstip $t = 0$ komt dus overeen met 1 januari 1984) en is $P(t)$ het aantal zalmen in duizendtallen aan het begin van het betreffende jaar.

We nemen $P(0) = 25$.

4p **17** ☐ Bereken met hoeveel procent de omvang van de zalmpopulatie volgens dit model is gedaald tussen begin 1986 en begin 1987.

In figuur 4 is de grafiek getekend van $y = 9x \cdot 0{,}99^x$.
Ook is de grafiek van $y = x$ getekend. Deze figuur is eveneens, vergroot, op de uitwerkbijlage afgebeeld.

figuur 4



In de grafiek kun je zien dat het model twee evenwichtswaarden heeft. Eén ervan is $P(t) = 0$.

3p **18** ☐ Bereken de tweede evenwichtswaarde.

Als we voor de beginwaarde de evenwichtswaarde kiezen dan zal de rij $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, … steeds dezelfde (evenwichts)waarde hebben.
Een evenwichtswaarde noemen we *stabiel* als bij keuzes van de beginwaarde in de buurt van de evenwichtswaarde geldt: de rij $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, … nadert tot die evenwichtswaarde.

5p **19** ☐ Onderzoek met een webgrafiek in de figuur op de uitwerkbijlage of de tweede evenwichtswaarde van het model stabiel is.

De ontwikkeling van de populatie volgens dit model hangt af van de beginwaarde $P(0)$. Het is mogelijk deze beginwaarde zo te kiezen dat de populatie al direct het volgende jaar zijn maximale omvang bereikt.

3p **20** ☐ Bereken bij welke beginwaarde dit het geval is.

Als we weer uitgaan van 25 duizend zalmen (dus $P(0) = 25$), zal het aantal zalmen een jaar later 175 duizend zijn (dus $P(1) = 175$). Wanneer men in de volgende jaren telkens in het begin van het jaar 150 duizend zalmen vangt, zal zich telkens dezelfde situatie voordoen: het model geeft 25 duizend zalmen aan het begin van het jaar en 175 duizend zalmen aan het eind van het jaar. We zeggen daarom dat de beginwaarde $P(0) = 25$ ruimte biedt om elk jaar 150 duizend zalmen te vangen want $P(1) = P(0) + 150$.
Er is nog een beginwaarde die ruimte biedt om elk jaar 150 duizend zalmen te vangen.

4p **21** ☐ Onderzoek welke andere waarde van $P(0)$ eveneens ruimte biedt om elk jaar 150 duizend zalmen te vangen.

Uitwerkbijlage bij vraag 19

Vraag 19