Eindexamen wiskunde A 12 VWO 2001 - I

Opgave 1 Contradansen

Een Engelse contradans is een muziekstuk dat uit twee delen bestaat. Ieder deel bestaat uit acht maten.
In het boekje „Musik mit Würfeln" staat een systeem beschreven om, zonder enige muzikale kennis, zelf zulke contradansen te maken met behulp van twee dobbelstenen. In dit boekje staan 176 verschillende maten uitgeschreven. Deze maten zijn genummerd van 1 tot en met 176. Ter illustratie zijn in figuur 1 de eerste zes maten afgebeeld.

figuur 1

De getallen 1 tot en met 176 zijn verdeeld over twee even grote tabellen. De tabel die nodig is voor het eerste deel van de contradans is afgebeeld in tabel 1.

tabel 1

De eerste acht maten:

aantal ogen:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
2	70	14	164	122	25	153	18	167
3	10	64	100	12	149	30	161	11
4	33	1	160	163	77	156	168	172
5	36	114	8	35	111	39	137	44
6	105	150	57	71	117	52	132	130
7	165	152	112	15	147	27	73	102
8	7	81	131	37	21	125	49	115
9	142	106	40	69	43	140	23	89
10	99	68	86	139	120	92	143	83
11	85	45	90	158	82	123	78	58
12	145	97	6	121	56	67	63	16

De andere tabel, die nodig is voor het tweede deel van de contradans, zullen we hier niet gebruiken.
Door nu 8 keer met twee zuivere dobbelstenen te gooien, kun je in tabel 1 aflezen uit welke maten het eerste deel van de contradans zal bestaan. Gooi je bijvoorbeeld bij de eerste worp samen 10 ogen, dan lees je in kolom *A* af dat maat 99 de eerste maat is. Gooi je daarna bijvoorbeeld samen 5 ogen, dan lees je in kolom *B* af dat maat 114 de tweede maat is. Zo ga je door totdat je uit elk van de kolommen *A* tot en met *H* één maat hebt gekozen. De aldus verkregen acht maten vormen het eerste deel van de contradans.

Iemand beweert dat er op deze wijze meer dan 200 miljoen verschillende eerste delen van contradansen gemaakt kunnen worden.

3p **1** □ Onderzoek of deze bewering waar is.

Het is mogelijk dat na drie keer gooien met de beide dobbelstenen de maten 36 – 114 – 8 de eerste drie maten vormen van het eerste deel van een contradans.

4p **2** □ Bereken de kans op deze volgorde.

Iemand beweert dat de kans dat maat *H* een nummer heeft dat groter is dan 100 gelijk is aan $\frac{5}{11}$. Immers, in de kolom onder *H* staan 11 getallen, waarvan er 5 groter zijn dan 100.
Met een berekening kunnen we aantonen dat deze bewering niet waar is.

6p **3** □ Bereken hoe groot deze kans wél is.

Opgave 2 Wijnvoorraad

Een wijnboer heeft op 1 januari 2001 een wijngaard gekocht die goed is voor een jaarproductie van 400 hl wijn (1 hl = 1 hectoliter = 100 liter).
De wijnboer wil kwaliteitswijn produceren die lang houdbaar is. Na de oogst wordt de nieuwe wijn twee jaar lang in eikenhouten vaten bewaard om te rijpen. Na die twee jaar wordt de wijn gebotteld (in flessen gedaan). In de flessen rijpt de wijn nog verder, waardoor de verkoopwaarde van de wijn toeneemt.
Als de wijnboer elk jaar direct al zijn gebottelde wijn verkoopt, dan kan hij niet van deze waardevermeerdering profiteren. Maar als hij al zijn gebottelde wijn opslaat in zijn wijnkelders, dan raken deze snel vol en heeft de wijnboer voorlopig geen inkomsten.
De wijnboer besluit om jaarlijks een vast percentage van zijn totale voorraad gebottelde wijn te verkopen. Hij verkoopt de wijn altijd aan het eind van het jaar nadat de gebottelde wijn aan de voorraad is toegevoegd.

Als de wijnboer er bijvoorbeeld voor kiest om elk jaar 25% van zijn totale voorraad gebottelde wijn te verkopen, dan ontwikkelt die voorraad zich de eerste jaren als in tabel 2.

tabel 2 **Voorraad bij verkoop van 25% van de gebottelde wijn per jaar**

	1 januari 2001	1 januari 2002	1 januari 2003	1 januari 2004	1 januari 2005	1 januari 2006
Nieuwe wijn (hl)	0	400	400	400	400	400
Eenjarige wijn (hl)	0	0	400	400	400	400
Gebottelde wijn (hl)	0	0	0	300	525	693,75

3p **4** □ Bereken de totale voorraad gebottelde wijn op 1 januari 2007 als de wijnboer jaarlijks 25% van al zijn flessen wijn verkoopt. Geef je antwoord in liters nauwkeurig.

Ook voor de rest van de opgave bekijken we de voorraad van de wijnboer alleen maar op 1 januari van ieder jaar.
Bij een ander percentage ontwikkelt de totale voorraad gebottelde wijn zich natuurlijk anders. Het vaste percentage van de gebottelde wijn dat de wijnboer jaarlijks verkoopt, noemen we p. De tijd in jaren noemen we t. Hierbij nemen we $t = 0$ op 1 januari 2001. De totale voorraad gebottelde wijn (in hl) op tijdstip t noemen we G_t.
Gedurende de eerste paar jaren is G_t gelijk aan 0: $G_0 = 0$, $G_1 = 0$ en $G_2 = 0$.
En verder geldt de volgende formule:

$$G_t = (1 - \frac{p}{100})G_{t-1} + 400 - 4p \text{ voor } t \geq 3$$

De totale voorraad gebottelde wijn groeit in de loop van de tijd naar een evenwichtswaarde. Deze evenwichtswaarde hangt af van de gekozen waarde van p.
Voor het verband tussen p en de evenwichtswaarde (in hl) geldt de volgende formule:

$$\textit{evenwichtswaarde} = \frac{40000}{p} - 400$$

Deze formule voor de evenwichtswaarde is uit bovenstaande formule voor G_t af te leiden.

5p **5** □ Leid bovenstaande formule voor de evenwichtswaarde af.

In de wijnkelders van de wijnboer kunnen slechts 280 000 flessen wijn worden opgeslagen. In een fles zit 0,75 liter wijn.

5p **6** □ Bereken bij welke waarden van p de wijnkelders op den duur niet voldoende capaciteit hebben.

De wijnboer besluit om jaarlijks 10% van zijn totale voorraad gebottelde wijn te verkopen. Door een verbouwing kan hij nu 2400 hl gebottelde wijn in zijn kelders opslaan.

6p **7** □ Onderzoek met behulp van de hierboven vermelde formule voor G_t en het gegeven dat $G_2 = 0$ in welk jaar de capaciteit van de wijnkelders voor het eerst niet meer voldoende is.

Opgave 3 Kwaliteitscontrole

In een fabriek worden plastic zakken gevuld met suiker. De vulmachine staat afgesteld op 510 gram.
Neem aan dat het gewicht van de zakken suiker normaal verdeeld is met een gemiddelde μ van 510 gram en een standaardafwijking σ van 4 gram.

3p **8** □ Bereken hoeveel procent van alle zakken een gewicht minder dan 500 gram zal hebben.

Om de kwaliteit van het vulproces te bewaken, wordt elk uur een aselecte steekproef van 5 zakken suiker genomen. Van elke zak noteert men het gewicht. Ook wordt van de steekproef het totale gewicht T berekend.

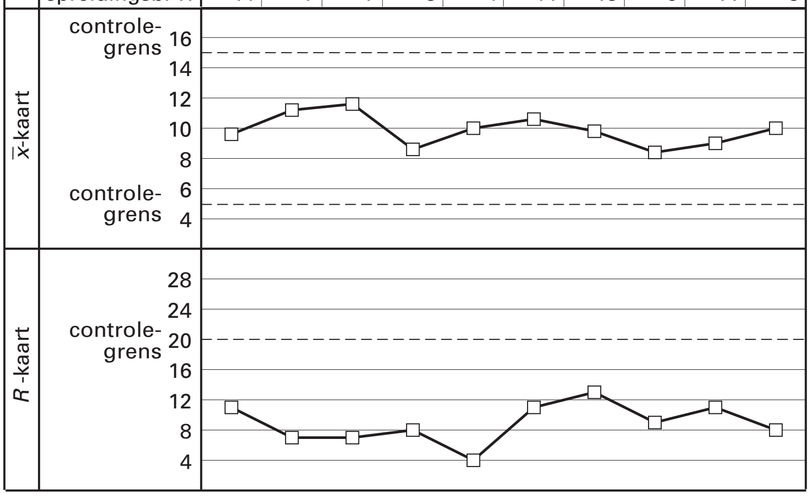
5p **9** □ Bereken de kans dat het totale gewicht van de steekproef minder is dan 2525 gram.

Verder bepaalt men van elke steekproef het gemiddelde gewicht $\bar{x}$ en de spreidingsbreedte R (dat is het verschil tussen de grootste en de kleinste meting).
Men noteert al deze gegevens op een controlekaart, de $\bar{x}/R$-kaart. Op de $\bar{x}/R$-kaart hieronder (zie figuur 2) staan de meetresultaten van 10 steekproeven.
Iedere steekproef bestaat uit 5 zakken. Op de controlekaart worden de afwijkingen van 500 gram bij ieder van deze 5 zakken genoteerd als x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5.
Zo heeft de derde zak van de tweede steekproef een gewicht van 509 gram. Dit is genoteerd als 9.
Het gemiddelde van de eerste steekproef is 509,6 gram. Dit wordt dan genoteerd als 9,6.
De spreidingsbreedte van de eerste steekproef is 515 – 504 = 11 gram.

figuur 2

$\bar{x}/R$-kaart

steekproefnr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	12	8	10	8	11	9	12	2	5	12
x_2	15	12	13	13	12	14	11	11	8	12
x_3	7	9	15	11	8	[illegible]	7	9	7	13
x_4	4	12	12	6	9	[illegible]	16	10	9	8
x_5	10	15	8	5	10	[illegible]	3	10	16	5
totaal T	48	56	58	43	50	53	49	42	45	50
gemiddelde $\bar{x}$	9,6	11,2	11,6	8,6	10	10,6	9,8	8,4	9	10
spreidingsbr R	11	7	7	8	4	11	13	9	11	8



Bij steekproef nummer 6 zijn enkele gegevens onleesbaar geworden.
3p **10** □ Welke getallen kunnen hier bijvoorbeeld gestaan hebben? Licht je antwoord toe.

Bij de controle van het vulproces met behulp van de $\bar{x}/R$-kaart let men erop of $\bar{x}$ of R de zogeheten controlegrenzen overschrijden. Deze controlegrenzen zijn in de grafieken met stippellijnen aangegeven. Zodra bij een steekproef een van deze grenzen overschreden wordt, slaat men alarm.
Op een gegeven moment slaat men alarm bij een steekproef, terwijl met de waarde van $\bar{x}$ niets mis is.

4p **11** □ Wat zouden de vijf gewichten in deze steekproef bijvoorbeeld kunnen zijn? Licht je antwoord toe.

De zakken zijn bedrukt met het bedrijfslogo. Soms is dit logo onscherp afgedrukt. Volgens de afdeling Verpakkingen heeft 5% van de zakken een onscherp logo. Een werknemer van die afdeling vermoedt echter dat dit percentage hoger is dan 5%. Er wordt een steekproef getrokken van 50 zakken. Op 6 van de 50 zakken is het bedrijfslogo onscherp.

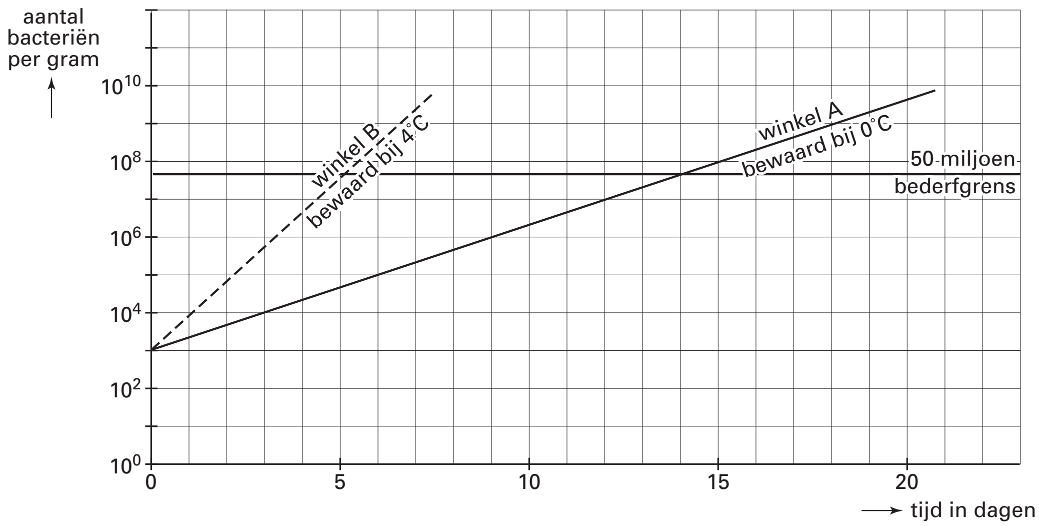
5p **12** □ Onderzoek of de 6 zakken met het onscherpe bedrijfslogo voldoende aanleiding zijn om de werknemer in het gelijk te stellen. Neem als significantieniveau $\alpha = 0{,}025$.

Opgave 4 Koeling

Wageningse onderzoekers hebben zich verdiept in de groei van het aantal bacteriën in voedsel. Bij constante bewaartemperatuur groeit het aantal bacteriën exponentieel. De bijbehorende groeifactor hangt af van die bewaartemperatuur.
Bij een krantenartikel hierover stond de volgende grafiek. Zie figuur 3. De schaalverdelingen langs de beide assen zijn zo gekozen dat de grafieken, die de groei van het aantal bacteriën weergeven, rechte lijnen zijn.
Deze figuur is ook afgebeeld op de bijlage.

figuur 3

Temperatuursafhankelijkheid van het bederf van kip door pseudomonasbacteriën



In de grafiek wordt de bacteriegroei beschreven in kip die bij 0 °C (winkel A) respectievelijk 4 °C (winkel B) wordt bewaard.

4p **13** □ Toon aan dat bij 0 °C het aantal bacteriën zich per dag meer dan verdubbelt.

In figuur 3 is het aantal bacteriën per gram bij het begin gelijk aan 1000. De bederfgrens ligt bij 50 miljoen bacteriën per gram. In de figuur is af te lezen dat kip die voortdurend op 0 °C wordt bewaard, na 14 dagen de bederfgrens bereikt.

Door verbeterde hygiëne is men in staat het aantal bacteriën bij het begin terug te brengen van 1000 per gram naar 100 per gram. Dit verlengt de houdbaarheid natuurlijk.
Bij bewaren bij 0 °C (winkel A) duurt het dan in totaal 17 dagen voordat de bederfgrens bereikt wordt. De houdbaarheid wordt dus met 3 dagen verlengd.
Bij bewaren bij 4 °C (winkel B) wordt de houdbaarheid door die verbeterde hygiëne met minder dan 3 dagen verlengd. De groeifactor per dag die bij 4 °C hoort, is 8,3.

5p **14** □ Met hoeveel dagen wordt de houdbaarheid bij 4 °C door die verbeterde hygiëne verlengd? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij gebruik maken van de figuur op de bijlage.

Om figuur 3 te tekenen gebruikten de onderzoekers een formule voor het verband tussen de bewaartemperatuur T en de groeifactor per dag g van het aantal bacteriën. Bij het opstellen van deze formule waren zij er van uitgegaan dat bacteriegroei alleen optreedt boven een bepaalde minimumtemperatuur. Deze minimumtemperatuur T_0 hangt af van het soort voedsel. Voor elk soort voedsel heeft de formule de volgende vorm:

$$g = 10^{(c(T-T_0))^2}$$

In deze formule is T in °C met $T \geq T_0$ en is c een constante.

We kunnen controleren dat er volgens deze formule inderdaad geen bacteriegroei optreedt als $T = T_0$.

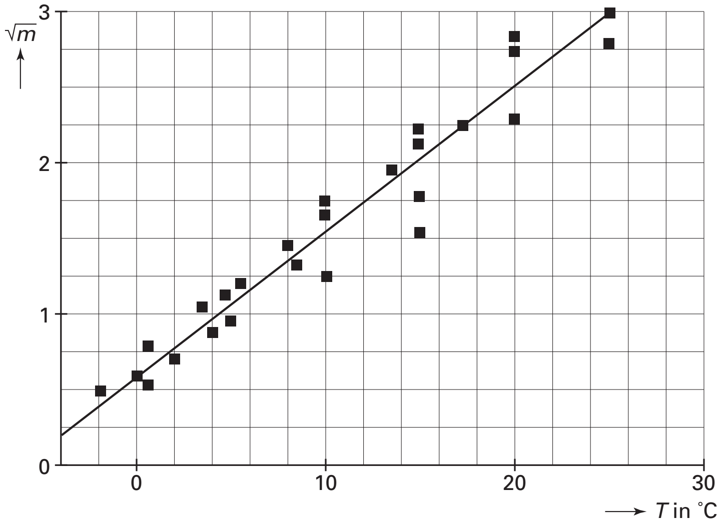
3p **15** □ Voer deze controle uit.

Uit praktische overwegingen schrijft men de formule voor de groeifactor vaak in de vorm $g = 10^m$. Deze variabele m is afhankelijk van T. Er geldt: $\sqrt{m} = c \cdot (T - T_0)$.

Voor elk soort voedsel moeten c en T_0 experimenteel bepaald worden. Zo heeft men voor kip bij allerlei bewaartemperaturen de bacteriegroei gemeten.
Bij de verwerking van de metingen hebben de onderzoekers het verband tussen T en $\sqrt{m}$ in een grafiek gezet, omdat dit verband volgens de formule lineair is. Het resultaat staat in figuur 4. Deze figuur is ook afgebeeld op de bijlage.

figuur 4

Pseudomonas in kip



6p **16** □ Leid uit de grafiek van dit lineaire verband benaderingen af voor de constanten c en T_0. Je kunt bij de beantwoording gebruik maken van de figuur op de bijlage.

Ga er in de rest van de opgave van uit dat geldt: $c = 0{,}096$ en $T_0 = -6$.

In figuur 3 kunnen we aflezen dat kip met een aantal bacteriën van 1000 per gram bij het begin na 14 dagen de bederfgrens bereikt wanneer die wordt bewaard bij 0 °C.

Het kan echter ook voorkomen dat deze kip tijdens het transport een halve dag (12 uur) wordt bewaard bij een temperatuur van 18 °C en daarna steeds bij 0 °C.

5p **17** □ Hoeveel eerder wordt dan de bederfgrens bereikt? Licht je antwoord toe en gebruik daarbij eventueel de figuur op de bijlage.

Wiskunde A1,2 (nieuwe stijl)

Examen VWO 2001

Tijdvak 1
Donderdag 31 mei
13.30 – 16.30 uur

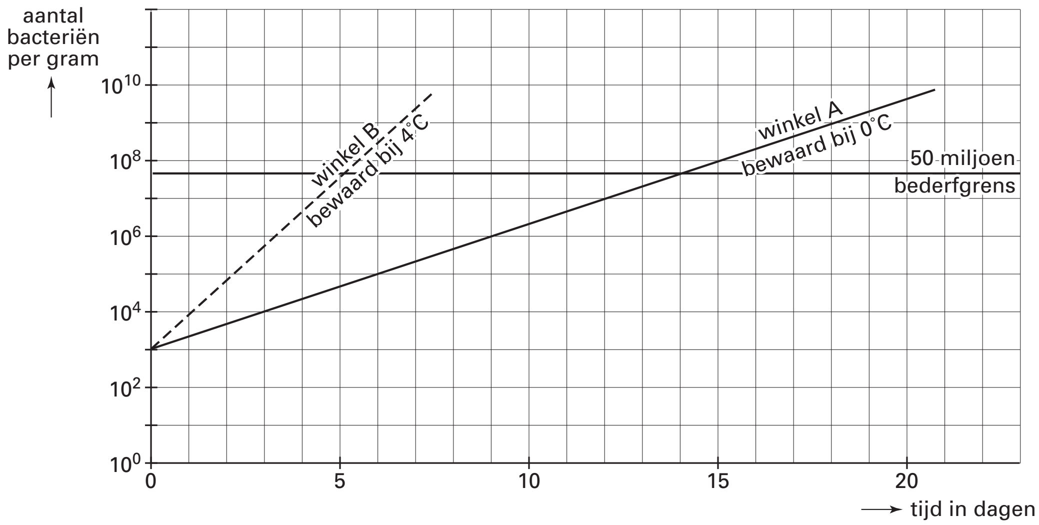
Examennummer

....

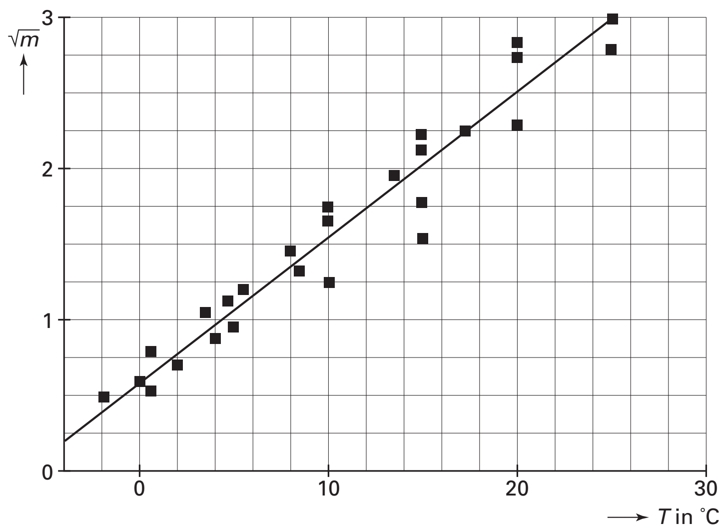
Naam

....

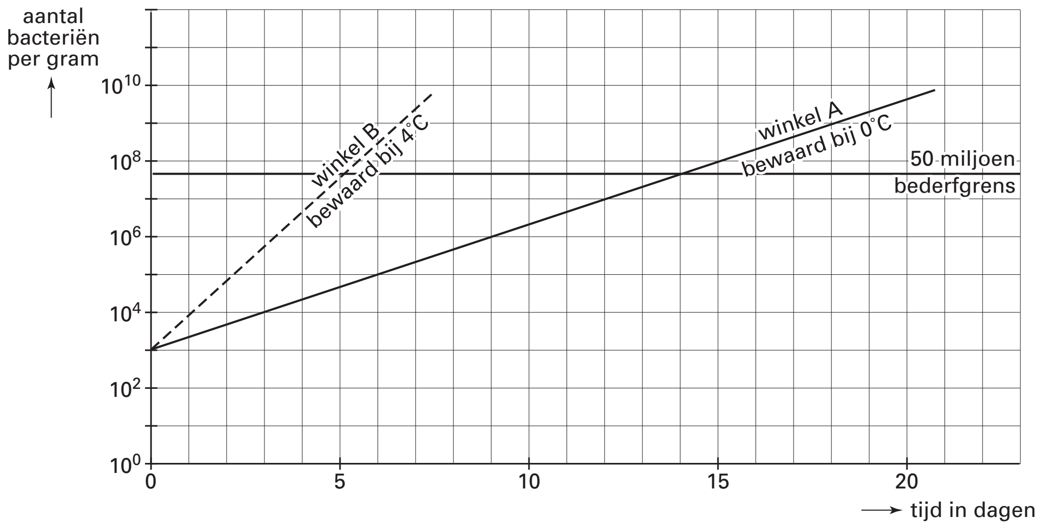
Vraag 14



Vraag 16



Vraag 17


aantal bacteriën per gram
10^{10}
10^{8}
10^{6}
10^{4}
10^{2}
10^{0}
0
5
10
15
20
tijd in dagen
winkel B bewaard bij 4°C
winkel A bewaard bij 0°C
50 miljoen bederfgrens

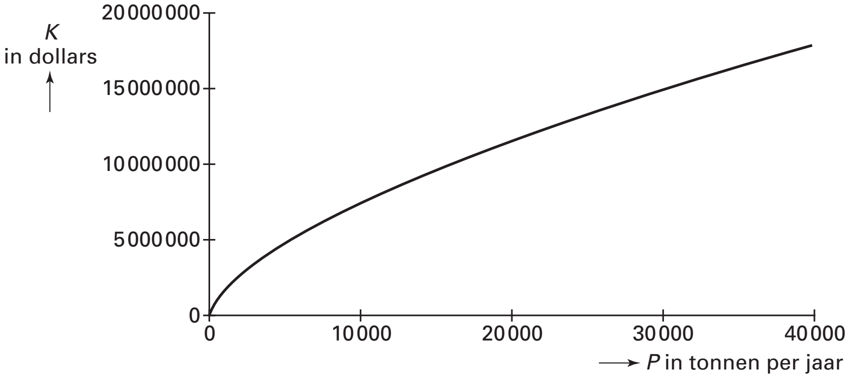
Opgave 5 Kosten bij plastics

Bij industriële productieprocessen worden de totale productiekosten voornamelijk bepaald door de grootte van de installaties die daarvoor gebruikt worden. Dit is bijvoorbeeld het geval bij de productie van plastics.
In deze opgave bekijken we zo'n productieproces. Alle bedragen in deze opgave zijn op jaarbasis. Voor een bedrijf waar een dergelijk productieproces plaats vindt, gebruikt men de volgende formule voor de kosten K:

$$K = 25\,000 \cdot P^{\,0{,}62}$$

In deze formule is K in dollars en is P de productie in tonnen per jaar.
De grafiek die bij deze formule hoort zie je in onderstaande figuur 5.

figuur 5



In de grafiek zien we dat de kosten toenemen als de productie toeneemt. Het is de vraag of ook de marginale kosten K' toenemen bij toenemende productie.

5p **18** □ Onderzoek of de marginale kosten toenemen bij toenemende productie.

Ook de opbrengst hangt van de productie af. Men gebruikt hiervoor de formule:

$$O = 750P$$

In deze formule is de opbrengst O in dollars en is P weer de productie in tonnen per jaar.

We willen nu onderzoeken op welke wijze de productie van plastics het best kan worden ingericht; de vraag is dan of de producent moet kiezen voor grootschalige dan wel kleinschalige productie. Doelstelling hierbij is dat de producent zo veel mogelijk winst wil maken.

Iemand gaat er van uit dat de maximale winst gevonden wordt als de marginale kosten K' gelijk zijn aan de marginale opbrengst O'. Hij berekent daartoe voor welke waarde van P geldt dat $K' = O'$.

5p **19** □ Bereken deze waarde van P.

De in vraag 19 berekende waarde van P levert echter niet de maximale winst op.

5p **20** □ Leg uit of de producent zijn productie grootschalig of kleinschalig moet inrichten om zoveel mogelijk winst te maken.