

Dennenhout

Een deel van de bossen in Nederland is bestemd voor de houtindustrie. Voordat een bos wordt gekapt, onderzoekt men meestal eerst hoeveel m^3 hout het bos op zal leveren. Dit gebeurt aan de hand van de diameter en de hoogte van bomen. De diameter van een boom wordt gemeten op een vaste hoogte. Voor het bepalen van de hoeveelheid hout in één boom wordt gebruik gemaakt van de volgende formule:

$$V = f \cdot d^2 \cdot h \text{ met diameter } d \text{ en hoogte } h \text{ beide in m (meter)}$$

In deze formule is V het volume aan hout in de boom in m^3 . De factor f heet de vormfactor. De vormfactor is een getal dat afhangt van de soort boom en de diameter d van de boom.

Een voorbeeld van een boom die gebruikt wordt in de houtindustrie is de grove den (*Pinus sylvestris*). Zie de figuur.

Voor de grove den wordt het verband tussen de vormfactor f en de diameter d (in m) bij benadering gegeven door de volgende formule:

$$f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$$

In een bos staat een grove den met een diameter van 0,16 m.

- 4p 1 Bereken hoeveel procent de vormfactor van deze boom afneemt als de diameter van deze boom met 100% toeneemt.

De grootste bekende diameter van een grove den is 1,2 m. Naarmate de diameter van een grove den groter is, is de hoogte ook groter. Voor de grove den geldt bij benadering het volgende verband tussen de hoogte h en de diameter d :

$$h = 44 \cdot d^{0,65}$$

Ook hier is de diameter in m en de hoogte in m.

Een grove den van 40 m hoog wordt gekapt.

- 4p 2 Bereken hoeveel hout deze grove den volgens de formules bevat.

figuur



Op basis van de formule $f = 0,30 \cdot d^2 - 0,36 \cdot d + 0,46$ en de formule $h = 44 \cdot d^{0,65}$ kan de formule $V = f \cdot d^2 \cdot h$ worden geschreven als $V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$. Hierin zijn a , b en c constanten.

- 4p 3 Toon aan dat V inderdaad geschreven kan worden als $V = a \cdot d^{4,65} + b \cdot d^{3,65} + c \cdot d^{2,65}$ en bereken a , b en c in twee decimalen nauwkeurig.

Een bos met grove dennen moet worden gekapt. Alvorens tot de kap over te gaan wordt eerst een schatting gemaakt van de houtopbrengst. Hiertoe worden de diameters van de bomen opgemeten en ingedeeld in klassen van verschillende grootte. Zie de tabel.

tabel

diameter in m	frequentie	volume in m ³ van een boom met een diameter gelijk aan het klassenmidden	totaal volume per klasse
0 – 0,05	2730	0,0011	3,0
0,05 – 0,10	1854	0,0200	37,1
0,10 – 0,15	1261	0,0747	94,2
0,15 – 0,20	874	0,1763	154,1
0,20 – 0,25	437	0,3330	145,5
0,25 – 0,30	131	0,5516	72,3

- 3p 4 Maak met behulp van de eerste twee kolommen van de tabel een schatting van de gemiddelde diameter.

De formule voor V is, met afgeronde getallen a , b en c :

$$V = 13 \cdot d^{4,65} - 16 \cdot d^{3,65} + 20 \cdot d^{2,65}$$

We bekijken de grafiek van V alleen maar voor waarden van d tussen 0 en 1,2. Iemand beweert dat de grafiek van V op dit stuk toenemend stijgend is.

- 4p 5 Stel de afgeleide functie van V op en toon met de grafiek van deze afgeleide functie aan dat deze bewering juist is.

In de derde kolom van de tabel staat het volume in m³ van een boom met een diameter gelijk aan het klassenmidden. Door de getallen in de tweede kolom te vermenigvuldigen met de getallen in de derde kolom wordt een schatting verkregen van de bijdrage van elke klasse aan de totale houtopbrengst, zie de vierde kolom in de tabel. Door de getallen in de vierde kolom op te tellen krijg je een schatting van ongeveer 506,2 m³ voor de totale houtopbrengst. Als we ervan uit gaan dat de diameters in een klasse gelijkmatig verdeeld zijn, zal deze schatting afwijken van de werkelijke houtopbrengst.

- 3p 6 Is de werkelijke houtopbrengst groter of kleiner dan 506,2 m³? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de toenemende stijging van V (zie vorige vraag).