Restzetels

Op 2 maart 1994 vonden er in Nederland gemeenteraadsverkiezingen plaats. In de gemeente Enschede werden 67 787 stemmen uitgebracht. De verkiezingsuitslag is weergegeven in tabel 1. In de tweede kolom is af te lezen hoeveel stemmen elke partij heeft behaald. In de laatste kolom van deze tabel staat aangegeven hoe, op basis van de verkiezingsuitslag, de zetelverdeling in de gemeenteraad van Enschede uiteindelijk is geworden.
Het proces om stemmen om te rekenen naar aantallen zetels is ingewikkeld. We gaan daar verderop in deze opgave nader op in. Eerst kijken we alleen naar het resultaat van de zetelverdeling.

tabel 1

partij	**aantal stemmen**	**aantal volle zetels**	**aantal zetels in de gemeenteraad**
1. PvdA	15 329	8	10
2. CDA	12 584	7	8
3. VVD	9080	5	5
4. D66	8751	5	5
5. GroenLinks	5150	2	3
6. GPV	3399	1	2
7. CD	2730	1	1
8. SP	1549	0	1
9. NCPN	589	0	0
10. van Loenen	2955	1	1
11. Enschede Nu	5671	3	3
totaal aantal uitgebrachte stemmen:	67 787	totaal aantal zetels:	39

Uit de tabel volgt dat PvdA, VVD en D66 samen een meerderheid kregen van de zetels in de gemeenteraad. Toch hadden deze drie partijen samen geen meerderheid van de stemmen.

4p **1** Laat met behulp van de gegevens in de tabel zien dat PvdA, VVD en D66 samen inderdaad een meerderheid aan zetels maar niet een meerderheid aan stemmen hebben behaald.

Om te bepalen op hoeveel zetels partijen recht hebben, wordt eerst de **kiesdeler** bepaald. De kiesdeler wordt berekend door het totaal aantal uitgebrachte stemmen te delen door het aantal beschikbare zetels in de gemeenteraad.

3p **2** Bereken de kiesdeler voor de verkiezingsuitslag van Enschede in 1994. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Om het aantal zetels te bepalen waar een partij recht op heeft, wordt vervolgens bij elke partij het aantal op die partij uitgebrachte stemmen gedeeld door de kiesdeler. Voor bijvoorbeeld de PvdA is de uitkomst hiervan ongeveer 8,82;

daarom heeft de PvdA 8 **volle zetels**. In de derde kolom van tabel 1 staat het aantal volle zetels van elke partij.
De beschikbare zetels in de gemeenteraad die nog niet zijn verdeeld met de volle zetels heten de **restzetels**. Voor de verdeling van de restzetels moet volgens de kieswet het systeem van de **grootste gemiddelden** worden gehanteerd. In de kieswet staat dit systeem als volgt beschreven:

fragment uit de Kieswet

Bij de verdeling van de restzetels volgens het systeem van de grootste gemiddelden wordt voor elke partij in gedachten één zetel opgeteld bij het behaalde aantal volle zetels. Vervolgens wordt het aantal op de partij uitgebrachte stemmen gedeeld door dit denkbeeldige aantal zetels. Op deze wijze wordt voor elke partij het gemiddelde aantal stemmen per zetel bepaald. De partij met het grootste gemiddelde krijgt een restzetel toebedeeld.
Aldus ontstaat een nieuwe tussenstand bij de zetelverdeling. Zolang er nog restzetels te verdelen zijn, wordt de hierboven beschreven procedure herhaald. Uitgaande van de nieuwe tussenstand wordt dan wederom in gedachten bij elke partij één zetel opgeteld bij het (in de tussenstand) behaalde aantal zetels. Wederom wordt de volgende restzetel toebedeeld aan de partij met het grootste gemiddelde aantal stemmen per zetel.
De systematiek voor de restzetelverdeling kan er toe leiden dat een partij meer dan één restzetel behaalt.

5p **3** Laat met berekeningen zien dat de eerste restzetel werd toegewezen aan GroenLinks.

De laatste restzetel werd toebedeeld aan de PvdA. Daaruit kun je concluderen dat de PvdA bij de verdeling van de laatste restzetel (dus bij de laatste tussenstand) 9 zetels had en de VVD 5 zetels.
Veronderstel nu eens dat een aantal mensen niet op de PvdA maar op de VVD gestemd zou hebben. Als dat aantal voldoende groot is, zou de VVD de laatste restzetel hebben gekregen. Dat kun je in het volgende voorbeeld zien.

Ga eens uit van 100 mensen die in plaats van op de PvdA op de VVD gestemd zouden hebben. In dat geval had de PvdA maar 15 229 stemmen gekregen in plaats van 15 329. En de VVD zou dan 9180 stemmen hebben gekregen in plaats van 9080. Met de restzetelverdeling zou de PvdA komen op een gemiddelde aantal stemmen per zetel van $\frac{15\,229}{10} \approx 1523$ en de VVD op $\frac{9180}{6} = 1530$. Omdat 1523 < 1530 zou de VVD dus de laatste restzetel krijgen.

Om de laatste restzetel bij de VVD terecht te laten komen, is er een kleiner aantal dan 100 mensen nodig die op de VVD in plaats van de PvdA zouden stemmen.

5p **4** Bereken hoe groot dit aantal ten minste moet zijn.

Rijexamen

Door het CBR (Centraal Bureau Rijvaardigheidsbewijzen) worden jaarlijks ruim 400 000 examens voor een rijbewijs voor personenauto's afgenomen. Dit examen bestaat uit twee delen: een theorie-examen en een praktijkexamen. Je moet eerst geslaagd zijn voor het theorie-examen voordat je mag deelnemen aan het praktijkexamen.

Vóór 1 oktober 2002 bestond het theorie-examen uit 50 ja/nee-vragen. Een kandidaat was geslaagd voor het theorie-examen als ten minste 45 ja/nee-vragen goed werden beantwoord.
Hannie Samson wist, tijdens haar theorie-examen, van 41 ja/nee-vragen het goede antwoord. Door de overige 9 ja/nee-vragen te gokken, had Hannie Samson toch een kans om te slagen.

5p **5** Bereken deze kans. Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Sinds 1 oktober 2002 is het theorie-examen vernieuwd. In het nieuwe theorie-examen zitten bij de 50 vragen niet alleen ja/nee-vragen maar ook andersoortige vragen zoals open vragen en/of driekeuzevragen. Ook nu is een kandidaat geslaagd voor het theorie-examen als ten minste 45 vragen goed worden beantwoord.

Herman Spiering doet een theorie-examen dat bestaat uit 40 ja/nee-vragen en 7 driekeuzevragen en 3 open vragen. Hij weet alleen het goede antwoord van 36 ja/nee-vragen en 6 driekeuzevragen. De 3 open vragen heeft hij in ieder geval fout. Van de resterende vragen moet Herman het antwoord gokken.
Herman kan nog slagen voor dit examen. Dan moet hij ten minste drie van de vier resterende ja/nee-vragen goed gokken of hij moet twee van de vier resterende ja/nee-vragen én de resterende driekeuzevraag goed gokken.

4p **6** Bereken de kans dat Herman zal slagen voor dit theorie-examen. Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Als je slaagt voor het theorie-examen mag je praktijkexamen doen. Als je zakt voor je praktijkexamen, kun je enige maanden later opnieuw praktijkexamen doen. Sommige kandidaten zakken meerdere keren voor het praktijkexamen. Het CBR houdt gegevens bij over de slaag- en zakcijfers van de kandidaten die opgaan voor het rijexamen. Uit de gegevens van het CBR blijkt dat een kandidaat steeds dezelfde kans heeft om te slagen voor het praktijkexamen. Hierbij speelt het dus geen rol of die kandidaat voor de eerste keer examen doet of al één of meer keren gezakt is. Verder blijkt dat 11% van alle kandidaten na 4 keer nog steeds niet is geslaagd voor het praktijkexamen.

Op basis van deze gegevens kun je nu berekenen hoe groot de kans is dat iemand de eerste keer al slaagt voor het praktijkexamen.

4p **7** Bereken deze kans. Geef je antwoord in 2 decimalen nauwkeurig.

Verhoudingen

In de wiskunde is de volgende rij getallen erg bekend:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Deze rij getallen staat bekend als de rij van Fibonacci (Pisa, 1170-1250). Elk getal in deze rij is te berekenen door de twee voorgaande getallen op te tellen. In formulevorm ziet dit er als volgt uit:

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ met $u_1 = 1$ en $u_2 = 1$

Je kunt dit eenvoudig narekenen bij het begin van de rij:
2 = 1 + 1
3 = 2 + 1
5 = 3 + 2
8 = 5 + 3
enzovoort.

Het is duidelijk dat de getallen in de rij van Fibonacci steeds groter worden.

4p **8** Bereken hoeveel getallen in de rij van Fibonacci een waarde hebben tussen 100 en 500.

De rij van Fibonacci heeft veel bijzondere eigenschappen. Zo heeft de rij die je krijgt door steeds de verhouding van twee opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci te nemen een grenswaarde G. Het gaat dan om de rij $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}$ enzovoort. De waarde van deze breuken is op den duur ongeveer gelijk aan 1,618. Vanaf een zeker moment ligt deze verhouding tussen 1,6180 en 1,6181.
Deze grenswaarde G is, met name in de kunst, bekend geworden als de **gulden snede.**

4p **9** Bereken vanaf welk tweetal opeenvolgende getallen in de rij van Fibonacci de verhouding ligt tussen 1,6180 en 1,6181.

In de 19e eeuw deed Fechner onderzoek naar de esthetische waarde die door velen aan de gulden snede wordt toegekend. Hij liet een aantal mensen rechthoeken zien waarvan de verhouding tussen de lengte en de breedte telkens verschillend was. Aan deze mensen werd gevraagd welke rechthoek zij het mooist vonden. Uit het onderzoek bleek dat rechthoeken waarvan de verhouding van de lengte en de breedte ongeveer de gulden snede opleverde, het meest werden uitgekozen.

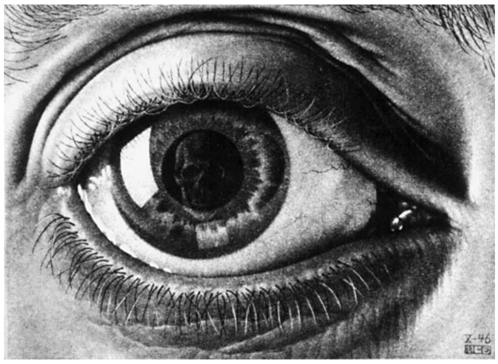
Mede op grond van deze resultaten stelde Petrov een formule op waarmee hij deze voorkeur wilde uitdrukken in een getal. Hij noemde dit de **appreciatiewaarde** A van de rechthoek en kwam met de volgende formule:

$$A = \left(\frac{1}{v} - 1\right) \cdot \log\left(1 - \frac{1}{v}\right)$$

In deze formule is v de verhouding tussen de langste zijde en de kortste zijde van de rechthoek, dus $v = \dfrac{\text{langste zijde}}{\text{kortste zijde}}$.

schilderij

litho



De afmetingen van het schilderij ‘De Nachtwacht’ van Rembrandt van Rijn zijn 363 cm bij 437 cm.
De afmetingen van ‘Oog’, een litho van M.C. Escher, zijn 141 cm bij 198 cm.

3p **10** Bereken welk van deze twee kunstvoorwerpen de grootste appreciatiewaarde heeft volgens de formule van Petrov.

Petrov constateerde dat de verhouding v tussen de langste en de kortste zijde waarbij de appreciatiewaarde maximaal is, maar weinig verschilt van de waarde 1,618 van de gulden snede.

4p **11** Bereken dit verschil.

IQ

Een maat voor iemands intelligentie is het zogenaamde IQ (Intelligentie Quotiënt). Hoe intelligenter een persoon is, hoe hoger zijn/haar IQ is. Het IQ is bij benadering normaal verdeeld.

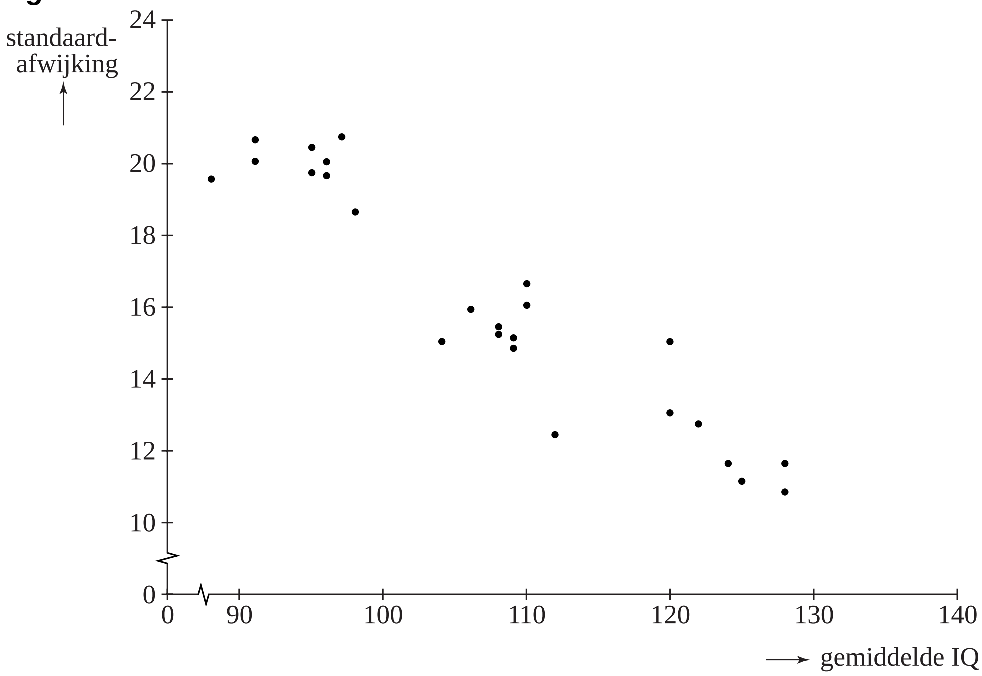
In deze opgave nemen we aan dat het IQ van een Nederlander normaal verdeeld is met een gemiddelde waarde van 100 en een standaardafwijking van 15.

In een boek over intelligentietests wordt beweerd dat ongeveer 4 op de 1000 Nederlanders een IQ van meer dan 140 hebben.

4p **12** Ga met een berekening na of deze bewering waar is.

Van een groot aantal mensen in 25 verschillende beroepsgroepen is het IQ gemeten. Voor elke beroepsgroep is vervolgens het gemiddelde IQ en de standaardafwijking bepaald. Deze waarden zijn uitgezet met stippen in de grafiek van figuur 1. Bij elke beroepsgroep hoort dus een stip.

figuur 1



We nemen aan dat binnen elke beroepsgroep het IQ van een persoon uit die beroepsgroep normaal verdeeld is. In figuur 1 is duidelijk te zien dat naarmate het gemiddelde IQ van een beroepsgroep groter is, de standaardafwijking kleiner is. Door de puntenwolk in de grafiek van figuur 1 kan een zo goed mogelijk passende rechte lijn worden getrokken. De formule voor deze lijn luidt: $\sigma = 45{,}5 - 0{,}272 \cdot \mu$. Hierin is σ de standaardafwijking en μ het gemiddelde IQ van een beroepsgroep.

Twee beroepsgroepen blijken een gemiddeld IQ van 110,6 en 115,3 te hebben. Beide beroepsgroepen zijn niet opgenomen in figuur 1. We veronderstellen echter dat ook voor deze beroepsgroepen de formule van de lijn gebruikt mag worden.

3p **13** Bereken hoeveel de bijbehorende standaardafwijkingen volgens de formule van de lijn van elkaar verschillen.

Omdat de standaardafwijking altijd groter dan 0 moet zijn, kan de formule $\sigma = 45{,}5 - 0{,}272 \cdot \mu$ niet geldig zijn boven een bepaalde waarde van μ.

3p **14** Bereken deze waarde van μ.

Het bovenstaande onderzoek wordt uitgebreid. Van beroepsgroep A, die nog niet bij het onderzoek betrokken was, worden 39 personen getest op hun IQ. De resultaten vind je in tabel 2.

tabel 2

IQ	Aantal personen
80 – 90	1
90 –100	3
100 – 110	6
110 – 120	12
120 – 130	11
130 – 140	4
140 – 150	2

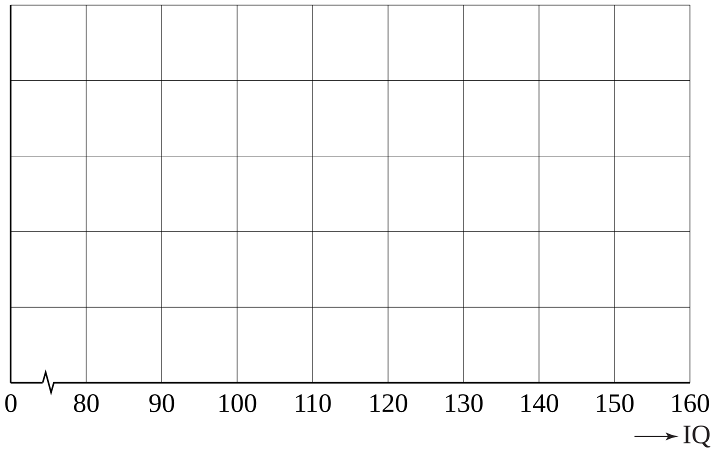
5p **15** Verwerk de gegevens van tabel 2 in een cumulatieve frequentiepolygoon in het assenstelsel op de uitwerkbijlage en maak daarmee een schatting voor de mediaan.

Van beroepsgroep B, die ook nog niet in het eerdere onderzoek opgenomen was, zijn 8 personen op hun IQ getest. Deze 8 personen hebben een IQ van 123, 108, 137, 121, 124, 129, 131 en 111.
Op basis van figuur 1 wordt de volgende algemene regel geformuleerd: ‘Bij een groter gemiddelde hoort een kleinere standaardafwijking.’

5p **16** Onderzoek of deze regel ook van toepassing is als we de steekproeven van de beroepsgroepen A en B met elkaar vergelijken.

uitwerkbijlage

15



Groenbelegging

Beleggingsmaatschappijen zoeken steeds naar nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.

foto

Plantage waar bomen voor belegging gekweekt worden

Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

Uw belegging groeit vanzelf.
De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Om een idee te krijgen van de te verwachten opbrengst, geven we u het volgende schema.

- Na 8 jaar moeten 200 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 7 m en een stamdiameter van 10,8 cm.
- Na 15 jaar moeten nog eens 300 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 12 m en een stamdiameter van 13 cm.
- De eindkap volgt na 20 jaar. Dan worden van elk perceel de resterende 460 bomen gekapt. De stamdiameter van de bomen is dan toegenomen tot 16 cm en de lengte tot 15,5 m.

De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0{,}16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout, D de stamdiameter van de boom in meter en L de lengte van de boom in meter.

Een Labironia-boom van 15 jaar oud levert meer m^3 benutbaar hout op dan een van 8 jaar oud.

3p **17** Bereken hoeveel m^3 het verschil bedraagt. Geef je antwoord in 3 decimalen nauwkeurig.

Een bioloog beweert dat de houtopbrengst van een Labironia-boom jaarlijks met ongeveer 14% toeneemt.

5p **18** Laat met berekeningen zien dat de gegevens in de folder overeenstemmen met deze bewering.

Verderop in de folder staat:

> U kunt deelnemen door een bedrag in te leggen van 5000 euro per perceel. U ontvangt dan in de komende twintig jaar de opbrengst van het op dat perceel geoogste hout. Wanneer we ervan uitgaan dat de houtprijs, die voor de Labironia momenteel 600 euro per m^3 bedraagt, in de komende jaren niet zal stijgen, is deze belegging de moeite waard. Zelfs als U de gelden die na 8 jaar en na 15 jaar vrijkomen in een oude sok bewaart (en dus niet wegzet op bijvoorbeeld een spaarrekening), is de opbrengst in totaal meer dan wanneer U de inleg twintig jaar lang op een spaarrekening met 8% rente per jaar zou hebben gezet.

6p **19** Bereken hoeveel die meeropbrengst naar verwachting ten minste bedraagt. Rond je antwoord af op honderden euro's.