Eindexamen wiskunde A vwo 2002-II (oude stijl)

Ransuilen in Vaes

In 1977 troffen onderzoekers in Vaes een kleine groep ransuilen aan. Vanaf dat moment heeft men ze nauwgezet bestudeerd. Daaruit bleek onder andere dat de ransuilen vroeg in het voorjaar broeden en dat de jongen half juni al kunnen vliegen. Uit de jaarlijkse tellingen, die steeds eind juni plaatsvonden, bleek dat de populatie voortdurend in omvang toenam. In tabel 4 staan enige resultaten.

tabel 4

Aantal ransuilen per eind juni

jaar	1977	1980	1982	1984	1987	1989
aantal	20	35	50	73	124	178

6p **9** ☐ Toon met behulp van logaritmisch papier aan dat het aantal ransuilen van 1977 tot en met 1989 vrijwel exponentieel groeide met een groeifactor van ongeveer 1,2 per jaar.

We kijken naar de ontwikkelingen in de loop van een jaar, die uiteindelijk de groeifactor van 1,2 per jaar opleveren.
Neem aan dat in de periode van 1977 tot en met 1989 het volgende gold:

- alleen in de winter gingen er ransuilen dood
- elk vrouwtje dat de winter overleefde, bracht daarna in het voorjaar twee jongen voort
- de populatie bestond steeds voor de helft uit vrouwtjes.

Andere factoren die van invloed zouden kunnen zijn op de ontwikkeling van de populatie, zoals vestiging of vertrek, laten we buiten beschouwing.

6p **10** ☐ Bereken hoeveel procent van de ransuilen elke winter dood ging.

Eind juni 1991 telde men 205 ransuilen. Dat is minder dan volgens de voorafgaande exponentiële groei verwacht mocht worden. Dit zou verklaard kunnen worden door het feit dat door ransuilen gebruikte broedplaatsen (bestaande holtes in bomen en gebouwen) altijd slechts in beperkte mate aanwezig zijn. Daardoor konden sommige vrouwtjes dat jaar geen broedplaats vinden.

Aanvankelijk dacht een onderzoeker het aantal ransuilen vanaf 1989 goed te kunnen voorspellen met een formule van de vorm:

$$N_1(t) = a - b \cdot 0{,}6^t$$

Hierbij is $N_1(t)$ het aantal ransuilen in jaar t en t het aantal jaren na eind juni 1989.

Hij koos a en b zo dat de formule 178 ransuilen opleverde voor 1989 ($t = 0$) en 205 ransuilen voor 1991 ($t = 2$). Zo vond hij voor a de waarde 220,2 en voor b de waarde 42,2.

6p **11** ☐ Bereken de waarden van a en b afgerond op *twee* decimalen.

We gebruiken verder in deze opgave de formule:

$$N_1(t) = 220{,}2 - 42{,}2 \cdot 0{,}6^t$$

Met deze formule kwam de onderzoeker voor eind juni 1993 uit op (afgerond) 215 ransuilen. Deze voorspelling kwam echter niet uit. Eind juni 1993 bleken er 223 ransuilen te zijn in plaats van de voorspelde 215. Daarom stelde de onderzoeker een nieuwe formule op die overeenstemde met de aantallen ransuilen van 1989, 1991 en 1993:

$$N_2(t) = \frac{250}{1 + 0{,}4045 \cdot 0{,}74^t}$$

Hierbij is $N_2(t)$ het aantal ransuilen in jaar t en t het aantal jaren na eind juni 1989.

De aantallen ransuilen van 1989, 1991 en 1993 geven een stijgende tendens te zien. We willen weten of dat volgens formule $N_2(t)$ zo blijft.
Hoewel $N_2(t)$ alleen voor gehele waarden van t zinvolle voorspellingen van het aantal ransuilen geeft, kunnen we $N_2(t)$ toch voor niet-gehele waarden van t berekenen. Met behulp van differentiëren is het dan mogelijk het stijgen of dalen van $N_2(t)$ te onderzoeken.

6p **12** ☐ Geef de afgeleide van $N_2(t)$ en onderzoek met behulp daarvan of er waarden van t zijn waarbij $N_2(t)$ daalt.

Ook na 1993 leiden de formules $N_1(t)$ en $N_2(t)$ tot verschillende voorspellingen van het aantal ransuilen.

4p **13** ☐ Bereken hoe groot de populatie ransuilen volgens zowel $N_1(t)$ als $N_2(t)$ op den duur zal zijn.